e-mail: fchaves@dmat.ufpe.br

CÁLCULO 2: LISTA 1
PERÍODO: 2016.2 (TURMAS F2 E F4)

PROF. FELIPE W. CHAVES-SILVA

Domínio, gráfico, curvas e superfícies de nível

Exercício 1. Determine e faça o esboço do domínio da função.

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ b) $f(x,y) = ln(2x^2+y^2-1)$

c) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ d) $f(x,y) = ln(9-x^2-9y^2)$

e) $f(x,y) = \sqrt{y-x}ln(y+x)$ f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + ln(4-x^2-y^2)$

g) $f(x,y) = \frac{x-3y}{x+3y}$ h) $f(x,y) = \frac{3x+5y}{x^2+y^2-4}$

i) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ j) $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

l) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ m) $f(x,y,z) = ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$

Exercício 2. Esboce o gráfico da função.

a) $f(x,y) = 3$ b) $f(x,y) = 1-x-y$

c) $f(x,y) = 1-x^2$ d) $f(x,y) = y$

e) $f(x,y) = 3-x^2-y^2$ f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

g) $f(x,y) = 4x^2+y^2+1$ h) $f(x,y) = \sqrt{16-x^2-16y^2}$

Exercício 3. Desenhe as curvas de nível.

a) $f(x,y) = xy$ b) $f(x,y) = y - lnx$

c) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ d) $f(x,y) = x-y^2$

d) $f(x,y) = e^{y/x}$ e) $f(x,y) = x^2-y^2$

f) $f(x,y) = 1-x^2$ g) $f(x,y) = x+y+1$

h) $f(x,y) = 1+x^2+y^2$ i) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Exercício 4. Esboce o gráfico da função.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Observação: Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ a partir do gráfico de g?

Exercício 5. Desenhe a superfície de nível correspondente a $c = 1$.

a) $f(x,y,z) = x$ b) $f(x,y,z) = \sqrt{1-z}$

c) $f(x,y,z) = x^2+y^2$ d) $f(x,y,z) = x^2+4y^2+z^2$

Exercício 6. Duas superfícies de nível de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ podem interceptar-se? Justifique.

Limite e Continuidade

Ao utilizar coordenadas polares, lembre-se do seguinte resultado:

Proposição 1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, então*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Longleftrightarrow \lim_{r\to 0} f(rcos\ \theta, rsen\ \theta) = L, \text{ uniformemente em } \theta.$$

Ou seja, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe se, e somente se, o limite radial de f escrito em coordenadas polares não depende de θ.

Exercício 7. Calcule, caso exista.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xsen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ b) $f(x,y) = \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$ d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\ (xy)}{x^2+y^2}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\ (x^2+y^2)}{1-cos\ \sqrt{x^2+y^2}}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

l) $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xycos(x-2y)$

m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4+y^4}$

n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+sen^2y}{2x^2+y^2}$

q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2sen^2y}{x^2+2y^2}$

r) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xycosy}{3x^2+y^2}$

s) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

Exercício 8. Determine o maior conjunto no qual a função é contínua. Justifique a resposta.

a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

b) $ln(\frac{x-y}{x^2+y^2})$

c) $f(x,y) = \frac{sen(xy)}{e^x-y^2}$

d) $\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = e^{x^2y} + \sqrt{x+y^2}$

f) $ln(x^2+y^2-4)$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-3y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercício 9. A função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

Exercício 10. A função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3x^2y^2+x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

Exercício 11. A função $f(x,y) = \begin{cases} 2 + \frac{\sqrt[3]{(x-3)(y-1)^5}}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (3,1) \\ 2, & \text{se } (x,y) = (3,1) \end{cases}$ é contínua em $(3,1)$? Justifique sua resposta.