e-mail: fchaves@dmat.ufpe.br

LISTA COMPLEMENTAR DE EXERCÍCIOS
ANÁLISE NA RETA: VERÃO 2017

PROF. FELIPE W. CHAVES-SILVA

Exercício 1. Suponha que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0}\big[g(x)(f(x)-1)\big] = c$. Prove que $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^c$.

Exercício 2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = b, \quad \lim_{x\to b} f(x) = c.$$

É verdade que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = c\ ?$$

Exercício 3. Seja $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo

$$f(x)e^{f(x)} = x.$$

Mostre que
a) f é crescente.
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
c) $f(x)/ln(x)$ tende a 1 quando $x \to \infty$.

Exercício 4. Seja $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e que existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lim_{x\to 0^+}\big[f(x) - f(\lambda x)\big]/x = 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0^+} f(x)/x = 0$.

Exercício 5. Encontre todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) + f(2x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 6. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que

$$f(r + 1/n) = f(r), \text{ para todo racional } r \text{ e todo natural } n.$$

Prove que f é constante.

Exercício 7. Prove que não existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que assume cada valor exatamente duas vezes.
Sugestão: Use o Teorema do Valor Intermediário.

Exercício 8. Seja $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ contínua. Mostre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
Observação: Esta é a versão unidimensional do Teorema do Ponto Fixo de Brower.

Exercício 9. Seja $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ contínua. Dado $x_1 \in [a, b]$, defina a sequência indutiva

$$x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ \ldots\ x_{n+1} = f(x_n),\ \ldots$$

Mostre que a sequência $\{x_n\}$ converge se e somente se $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$.
Além disso, veja que se $x_n \to x_0$ então $f(x_0) = x_0$.

Observação: A sequência $\{x_n\}$ definida acima é chamada de sequência de aproximações sucessivas de Picard. E no caso em que converge, ela converge a um ponto fixo da função f. Note também que a sequência $\{x_n\}$ começa em um ponto arbitrário $x_1 \in [a, b]$.

Sugestão: Prove o seguinte resultado:
"Se $\{x_n\}$ é uma sequência de números reais tal que $(x_{n+1} - x_n) \to 0$, então o conjunto dos valores de aderência de $\{x_n\}$ é exatamente o intervalo $[l, L]$ (degenerado se $l = L$), onde $l = \liminf x_n$ e $L = \limsup x_n$".

Exercício 10. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in [0, 1]$. Prove que o conjunto dos pontos fixos de f, i.e., o conjunto $F = \{x \in [0, 1]; f(x) = x\}$, ou é formado por um único ponto ou é um intervalo.

Exercício 11. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua satisfazendo

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Prove que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$.

Exercício 12. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio. Considere a função distância $d_E : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ dada por

$$d_E(x) := d(x, E) = \inf\{|x - z|; z \in E\}.$$

Mostre que d_E é uniformemente contínua.

Exercício 13. Sejam $K, F \subset \mathbb{R}$ tal que K é compacto e F é fechado e $K \cap F = \emptyset$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $|p - q| > \delta$ para todo $p \in K$ e todo $q \in F$.
O resultado continua verdadeiro se assumirmos apenas K e F fechados e $K \cap F = \emptyset$?

Sugestão: Use a função d_F definida no exercício anterior.

Exercício 14. Sejam $E, F \subset \mathbb{R}$ conjuntos fechados com $E \cap F = \emptyset$. Defina

$$f(x) = \frac{d_E(x)}{d_E(x) + d_F(x)}$$

Mostre que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ esta bem definida e é contínua. Qual a imagem de f?
Mostre também que $f(x) = 0$ se $x \in E$ e $f(x) = 1$ se $x \in F$. Verifique que isto implica que $E = f^{-1}(\{0\})$.

Exercício 15. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, onde $M > 0$ e $\alpha > 1$. Prove que f é constante.

Exercício 16. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0.$$

Sugestão: Dado $\epsilon > 0$, use o fato que f é uniformemente contínua para concluir que existe n_0 tal que $2n > n_0$ implica $|s_{2n}| = \left|\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(\frac{k}{2n})\right| \leq \epsilon/2$. Use isto para estimar s_{2n+1}.

Exercício 17. Seja $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(0) = f(2)$, prove que existem x_1 e x_2 em $[0,1]$ tal que

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ e } f(x_2) = f(x_1).$$

Dê uma interpretação geométrica desse fato.

Exercício 18. Dê um exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujos pontos de descontinuidade é exatamente $\mathbb{Q}$.
É possível contruir f de forma que os pontos de descontinuidade seja exatamente o conjunto dos números irracionais?

Observação: Você deve provar que a função dada é descontínua exatamente em $\mathbb{Q}$.