e-mail: fchaves@dmat.ufpe.br

PRIMEIRA LISTA COMPLEMENTAR DE EXERCÍCIOS
TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES: 2017.1

PROF. FELIPE W. CHAVES-SILVA

Exercício 1. Seja T_k a distribuição asssociada a $f_k(x) = \Big(cos(x/\sqrt{k})\Big)^k$. Mostre que $\big(T_k\big)$ converge no sentido das distribuições a uma $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e determine T. É verdade que $f_k(x)$ converge como função?

Exercício 2. Seja $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$, que é uma função localmente integrável, e denote por T_n a distribuição correspondente.

a) Mostre que $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{sen\big((2N+1)t/2\big)}{sen(t/2)}$.

b) Mostre que F_N converge em qualquer ponto t que é um múltiplo irracional de π.

c) Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ com suporte em $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Deduza da igualdade anterior que

$$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sen\big((2N+1)t/2\big)}{sen(t/2)}\psi(t)dt,$$

onde $\psi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t + 2k\pi)$.

d) Escreva $\psi(t) = \psi(0) + th(t)$, onde $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ (isso é possível?) e mostre que T_N converge a $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_{2p\pi}$, onde δ_{x_0} é a delta de Dirac em x_0.

Exercício 3. Seja $f(x) = |senx|$. Calcule $f'' + f$ no sentido das distribuições.

Exercício 4.
a) Calcule a derivada no sentido das distribuições da função

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

e definida por periodicidade a $\mathbb{R}$, com periodo 2π.

b) Calcule a série de Fourier associada a f.

c) Deduza que

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} cos(kx) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(x-2k\pi)}$$

e

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} ksen(kx) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta'_{(x-2k\pi)}$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercício 5. Calcule os seguintes limites em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

a) $\lim_{n\to\infty} sen(nx)$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(nx)}{x}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} \delta_{\frac{p}{n}}$

d) $\lim_{n\to\infty} e^{inx}\text{vp}(\frac{1}{x})$ e) $\lim_{n\to\infty} nf(nx),\ f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercício 6. Seja $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$. Mostre que T_n converge em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Compare a ordem de T_n com a ordem do limite de (T_n).

Exercício 7. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Mostre que as séries a seguir são convergentes

a) $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j\varphi(2^j)$ b) $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\varphi(2^{-j})$

Exercício 8. Mostre que a aplicação $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $< T, \varphi >= \sum_{-\infty}^{\infty} 2^j\varphi(2^j)$, define uma distribuição de ordem zero.

Exercício 9. O objetivo deste exercício é provar:

Teorema de Borel Dada qualquer sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos, existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente derivável tal que

$$f^n(0) = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Utilize uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, suportada em $[-1, 1]$ e que seja igual a 1 em uma vizinhança de 0 para resolver o problema no caso em que a série inteira $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}x^n$ tem um raio de convergência não nulo.

b) Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, suportada em $[-1, 1]$ e igual a 1 em $[-1/2, 1/2]$. Para cada n, considere

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!}x^n\varphi(x) \quad e \quad M_n = \sup\{|f_n^k(x)|;\ x \in \mathbb{R},\ k < n\},$$

$$\lambda_n = \max(2, 2^n M_n)$$

e a função
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-n}f_n(\lambda_n x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\varphi(\lambda_n x).$$
Mostre que a função f está bem definida e que a série converge uniformente em $\mathbb{R}$.

c) Mostre que a série das k-ésimas derivadas de $\lambda_n^{-n}f_n(\lambda_n x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para todo $k\in\mathbb{N}$ fixo.

d) Deduza que $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ e calcule $f^k(0)$.

e) É possível obter uma função verificando as mesmas propriedades e que seja inteira?

Exercício 10. Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ aberto.

a) Construa uma sequência K_n de compactos tal que $K_n\subset K_{n+1}$ e $\cup K_j=\Omega$.

b) Seja $p_n(f)=||f||_{C^n(K_n)}$ e
$$d(f,g)=\sum_n 2^{-n}\frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$
Seja $f_n\in C_0^\infty(K_{n+1})$ tal que $f\big|_{K_n}=1$. Mostre que f_n é uma sequência de Cauchy com respeito a d.

c) Conclua que $\big(\mathcal{D}(\Omega),d\big)$ não é completo.

d) Qual a conclusão deste exercício em termos topológicos?

Exercício 11. Seja $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função de Heavside
$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq 0\\ 0 & \text{se } x<0.\end{cases}$$
e considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=H(x)+H(y)$. Prove que para $\alpha=(1,1)$ e $\beta=(1,0)$, temos $\partial^\alpha f,\partial^{\alpha+\beta}f\in L^1_{loc}(\Omega)$ enquanto $\partial^\beta f\notin L^1_{loc}(\Omega)$.

Exercício 12. Seja $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ e para cada $\epsilon>0$ defina $f_\epsilon(x)=\epsilon^{-n}f(x/\epsilon)$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$.

a) Prove que para toda $g\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ que é contínua em $0\in\mathbb{R}^N$, temos
$$\int_{\mathbb{R}^N}f_\epsilon(x)g(x)dx\to\left(\int_{\mathbb{R}^N}f(x)dx\right)g(0),\ \text{quando } \epsilon\to 0^+.$$

b) Defina $f_k(x)=k^nf(kx)$, para todo $x\in\mathbb{R}^N$. Mostre que $f_k\in L^1(\mathbb{R}^N)$, e portanto a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, e
$$f_k\longrightarrow c\delta_0\quad\text{em}\quad\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$
onde $c=\int_{\mathbb{R}^N}f(x)dx$.

Sugestão: Na parte a), faça uma mudança de variáveis e use o Teorema da convergência dominada.

Exercício 13. Seja $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ não nula e

$$\theta_k(x) = \frac{1}{k}\theta(kx), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Prove que θ_k não converge em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Exercício 14. Seja $k \in \mathbb{N}$ e $c_\alpha \in \mathbb{C}$, com $|\alpha| \leq k$. Prove que

$$\sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow c_\alpha = 0 \ \ \forall \alpha.$$

Exercício 15. Prove que se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e *supp* $T \subset \{x_0\}$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$, então T tem uma representação única da forma

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0},$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e coeficientes $c_\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercício 16. Verifique que a distribuição *pv* $\frac{1}{x}$ é solução da equação $xT = 1$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e mostre que a solução geral da equação é dada por *pv* $\frac{1}{x} + c\delta_0$, com $c \in \mathbb{C}$.

Dada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, encontre uma solução da equação $xT = \psi$.

Exercício 17. Resolva a equação $x^m T = 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercício 18. Considere a aplicação $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$< T, \varphi >= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi(1/j^2) - \varphi(0)\right], \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Prove que T está bem definida. T é uma distribuição? Se sim, qual a ordem de T?

Exercício 19. Considere a aplicação $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$< T, \varphi >= \sum_{k=1}^{\infty} \left.\frac{d^k\varphi}{dx^k}\right|_{x=k} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Prove que T é uma distribuição que não tem ordem finita.

Exercício 20. Prove que existem funções pontualmente deriváveis na reta para as quais a derivada no sentido das distribuições não coincide com a derivada clássica.

Sugestão: Considere função $f(x) = x^2 cos(1/x^2)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, mostre que $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, que f é derivável na origem mas que $f' \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Exercício 21. Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $< T, \varphi >= 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 0$. Prove que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $T = c$.

Exercício 22. Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Prove que

$$< T_x, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)dy >= \int_{\mathbb{R}^n} < T_x, \varphi(x,y) > dy.$$

Exercício 23. Prove que $(ln|x|)' = pv\frac{1}{x}$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Por que $ln|x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

Exercício 24. Seja $f_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$. Prove que

$$f_t \longrightarrow \delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

quando $t \longrightarrow 0^+$.

Observação: $f_t(x)$ é uma solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 25. Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $u(x,t) = f(x+kt) + g(x-kt)$. Verifique que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e que é solução da equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercício 26. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Encontre todas as distribuições $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$supp\ T \subset \{a, b\}.$$

Exercício 27. Seja

$$u(x,y) = ln(x^2+y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

i) Mostre que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.
ii) Prove que $\Delta u = 4\pi\delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 28. Mostre que

$$\delta_{sinx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2ikx}.$$

Exercício 29. Mostre que não existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} e^{1/x^2} \varphi(x)dx,$$

para toda $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus 0)$.

Sugestão: Construa $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ suportada em $\{1/n < |x| < 2/n\}$, tendendo a zero em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e tal que $< T, \varphi_n >$ tende ao infinito.