e-mail: fchaves@dmat.ufpe.br

LISTA COMPLEMENTAR DE EXERCÍCIOS (DERIVADAS)
ANÁLISE NA RETA: VERÃO 2017

PROF. FELIPE W. CHAVES-SILVA

Exercício 1. Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que não existe $x \in \mathbb{R}$ com $f(x) = f'(x) = 0$. Mostre que o conjunto $Z = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$ é finito.

Exercício 2. Prove que não existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ continuamente diferenciável (i.e., de classe C^1) tal que $f' = f \circ f$.

Exercício 3. Encontre todos os inteiros a, b tal que $0 < a < b$ e $a^b = b^a$.

Sugestão: Use a função $f(x) = lnx/x$.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(x) + f'(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Encontre o maior valor possível para $f(1)$.

Sugestão: Use a função $g(x) = e^x(f(x) - 1)$.

Exercício 5. Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ e $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ para todo $x \in (0,1)$. Mostre que f é a função identicamente nula.

Exercício 6. Considere a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$, com $p \geq 1$. Encontre o máximo e o mínimo de f.
Aplique este resultado para provar a desiguladade:

$$|a|^p + |b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p), \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x = 0$ e tal que $f(x) = 2f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é linear.

Exercício 8. Seja $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Se $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in (a,b)$, prove que f tem um único ponto fixo, i..e, existe um único $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Assuma que ambas f e f'' sejam limitadas e escreva

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \ M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

Prove que f' é limitada e que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercício 10. Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Mostre que se tivermos $g'(x) \neq 0$ para todo $x_0 \neq x$ em I então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

Observação: Em (1), o limite pode tanto existir quanto ser $\pm\infty$.

Exercício 11. Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty,$$

Mostre que se tivermos $g'(x) \neq 0$ para todo $x_0 \neq x$ em I então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2}$$

Observação 1: Se tivermos $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, (2) continua sendo verdade.

Observação 2: Em (2), o limite pode tanto existir quanto ser $\pm\infty$.

Exercício 12. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Prove que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e que $f^n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 13. Seja $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $(0, 2)$. Se $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 1$, mostre que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

Exercício 14. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$ com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Prove que dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem n pontos distintos $x_1, \ldots x_n$ em $[0, 1]$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n.$$

Exercício 15. (Wronskiano) Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O Wronskiano de f e g é defnido como

$$W(f, g)(x) = det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Prove que se $W(f, g)$ não se anula em I e existem $x_1 < x_2$ em I tal que $f(x_1) = f(x_2) = 0$ então existe $x_3 \in (x_1, x_2)$ tal que $g(x_3) = 0$

Observação: As funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$ são um exemplo.

Exercício 15. Seja $f : [a, b] \longrightarrow (0, \infty)$ continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Sugestão: Use a função $g = ln(f)$.

Exercício 16. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que para todo $x \in [a, b]$ temos

$$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 > 0.$$

Mostre que o conjunto $X = \{x \in [a, b]; f(x) = 0\}$ é finito.

Considere a função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 sin(1/x), \text{ se } x \in (0, 1)$$

e definida por continuidade por $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Veja que o resultado é falso se $[f]^2+[f']^2$ se anula em algum ponto