e-mail: fchaves@dmat.ufpe.br

SEGUNDA LISTA COMPLEMENTAR DE EXERCÍCIOS
TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES: 2017.1

PROF. FELIPE W. CHAVES-SILVA

Exercício 1. Seja $R \in (0, \infty)$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$(|x|^2 - R)T = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Prove que T tem suporte compacto. Dê um exemplo de uma distribuição que resolve essa equação.

Exercício 2. Seja $f \in C^0(\Omega)$ tal que $T_f \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Prove que f tem suporte compacto e que $supp\ f = supp\ T_f$.

Exercício 3. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x-2|+|y-1| < 1\}$. Calcule $(\partial_1^2 - \partial_2^2)1_A$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 4. Seja $\psi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Prove que para toda $G \in \mathcal{D}'(\Omega)$, existe uma única $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\psi T = G$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exercício 5. Seja $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e suponha que $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são tais que $T_1 \neq T_2$ e que $\psi T_1 = \psi T_2$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Prove que o conjunto $\{x \in \Omega;\ \psi(x) = 0\}$ é não vazio.

Exercício 6. Sejam $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
a) $T\big|_{\Omega \setminus supp(T)} = 0$.
b) Se $\varphi \in C_0^\infty\Omega$ e $supp(\varphi) \cap supp(T) = \emptyset$ então $< T, \varphi => 0$.
c) $supp(T + S) \subset supp(T) \cup supp(S)$.
d) Se $f \in C^\infty\Omega$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então

$$supp(fT) \subset supp(f) \cap supp(T).$$

e) $supp(\partial_x^\alpha T) \subset supp(T)$ para todo $\alpha \in N^n$.

Exercício 7. Prove que se $f \in C^1(\Omega)$ então $\partial_{x_i}(T_f) = T_{(\partial_{x_i} f)}$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Exercício 8. Para toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e todo $i, j = 1, \cdots, n$, temos

$$\partial_{x_i}(\partial_{x_j} T) = \partial_{x_j}(\partial_{x_i} T)$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando isso é verdade no caso de funções?

Exercício 9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $(\omega_i)_{i \in I}$ uma família de abertos de Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i.$$

Seja $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ uma família de distribuições com

$$T_i\Big|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j\Big|_{\omega_i \cap \omega_j}, \quad \forall i, j \in I \text{ tal que } \omega_i \cap \omega \not= \emptyset.$$

Então existe uma única $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$T\Big|_{\omega_i} = T_i, \quad \forall i \in I.$$

Observação: *O resultado acima diz que podemos reconstruir uma distribuição se conhecemos sua restrição a cada aberto de um recobrimento (aberto) de Ω.*

Exercício 10. Seja $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $< T, x^\alpha >= 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Prove que $T = 0$ em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 11. Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$ tal que $f \geq 0$ q.s.. Mostre que f se prolonga a uma distribuição em $\mathbb{R}$ se e somente se existe $k \geq 0$ tal que

$$\int_\epsilon^1 f(x)dx = O(\epsilon^{-k})$$

para $\epsilon \to 0^+$.

Exercício 12. Encontre todas as distribuições $T \in \mathcal{D}'\mathbb{R})$ tal que

$$< T, \varphi \star \psi >=< T, \varphi >< T, \psi >,$$

para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}\mathbb{R})$.

Exercício 13. A equação $u' = e^{-x^2}$ tem solução em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Exercício 14. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Prove que a equação $u' = \varphi$ tem solução $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se e somente se $\int_\mathbb{R} \varphi(x)dx = 0$.

Exercício 15. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos de $\mathbb{R}^N$. Prove que $\{x_n\}$ converge em $\mathbb{R}^N$ se e somente se δ_{x_n} converge em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

Exercício 16. Seta $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Prove que

$$T = \delta_0 \Longleftrightarrow T \star f = f, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Exercício 17. Seja $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $< T, \varphi_n > \longrightarrow 0$ para toda distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ de ordem finita. Mostre que $\varphi_n \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Observação: Este exerccio mostra que introduzir a convergência fraca em $\mathcal{D}$ não leva a nada novo.

Exercício 18. Mostre que existe uma infinidade de funções $u = u(t,x)$, $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes, tal que

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}),$$

$$u(x,t) \to u_0(x), \text{ para todo } x \neq 0 \text{ quando } t \to 0,$$

onde

$$u_0(x) = 1, \text{ se } x > 0, \qquad u_0(x) = -1, \text{ se } x < 0.$$

Exercício 19. Determine todas as distribuições $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$< T, \varphi \star \psi >=< T, \varphi >< T, \psi >, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Exercício 20.
a) Existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = 0?$$

b) E se supormos que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$?
c) Existe $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$< S, x^k >= 0?$$

Exercício 21. (*Princpio da Incerteza de Heisenberg*)
a) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a valores complexos. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x \mathcal{R}e \left(\overline{f(x)} \frac{df}{dx}(x) \right) dx \right)^2.$$

b) Deduza que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

Exercício 22. Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$< T, \varphi >= \int_0^1 \varphi(x,0) dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

a) Qual a ordem e o suporte de T?
b) Mostre que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$
c) Calcule a Transformada de Fourier de T.

Exercício 23. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uma função positiva. Encontre o ponto ξ onde a função $\xi \mapsto |\hat{f}(\xi)|^2$ atinge o valor máximo.