e-mail: fchaves@dmat.ufpe.br

CÁLCULO 2: LISTA 3
PERÍODO: 2016.2 (TURMAS F2 E F4)

PROF. FELIPE W. CHAVES-SILVA

Exercício 1. Compute o gradiente da função

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{zx^2 + xy^2 + yz^2}$

d) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$

e) $f(x, y) = ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

f) $f(x, y) = (x^2 + y^2)ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

g) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$

h) $f(x, y) = xe^{xy^3+3}$

Exercício 2. Calcule a derivada direcional da função no ponto dado e na direção indicada.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy^3; (x_0, y_0) = (1, 2); \vec{u} =< 1/2, \sqrt{3}/2 >$

b) $f(x, y) = e^x cosy; (x_0, y_0) = (0, \pi/4); \vec{u} = (\vec{i} + 3\vec{j})\sqrt{10}$

c) $f(x, y) = 17x^y; (x_0, y_0) = (1, 1); \vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})\sqrt{2}$

d) $f(x, y) = e^{x^2 cosy}; (x_0, y_0) = (1, \pi/2); \vec{u} = (3\vec{i} + 4\vec{j})5$

e) $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 3z^2; (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2); \vec{u} = (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})\sqrt{3}$

f) $f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}; (x_0, y_0, z_0) = (1, 10, 100); \vec{u} =< 1/\sqrt{3}, -1\sqrt{3}, -1\sqrt{3} >$

g) $f(x, y, z) = sin(xyz); (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, \pi/4); \vec{u} =< 1/\sqrt{2}, 0, -1\sqrt{2} >$

h) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}; (x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 1); \vec{u} = (\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i})\sqrt{6}$

Exercício 3. Dada a função e o ponto indicado, calcule a direção de crescimento máximo da função.

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2; (x_0, y_0) = (3, 2)$

b) $g(x, y) = x^2 - 2y^2; (x_0, y_0) = (3, 2)$

c) $f(x, y) = e^x siny; (x_0, y_0) = (1, 1)$

d) $g(x,y) = e^x siny - e^{-x} cosy; (x_0, y_0) = (1,1)$

Exercício 4. Encontre $\nabla f(a,b)$ para a função $f(x,y)$ com as seguintes derivadas direcionais:

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = 3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad D_{\vec{v}} f(a,b) = 5,$$

onde $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ e $v = (3\vec{i} - 4\vec{j})/5$.

Exercício 5. Encontre as dimensões de uma caixa retangular, sem tampa, que tem um volume V dado e a menor área de superfície total possível para seus cinco lados.

Exercício 6. Encontre três números positivos a, b e c cuja soma é 30 e para o qual a expressão ab^2c^3 é máxima.

Exercício 7. O valor máximo atingindo por $x + 2y + 4z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ é $a\sqrt{3}$ onde $a =?$.

Exercício 8. Uma caixa retangular sem tampa é feita de $18m^2$ de um dado material. O maior volume possível para a caixa é de $a\sqrt{2a}\ m^3$ onde $a =?$.

Exercício 9. Encontre os pontos da superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano definido por $3x - y + 3z = 1$.

Exercício 10. Suponha que a temperatura no ponto (x,y,z) é dado por $T = xyz$. Se você se encontra no ponto $(1,1,1)$, em que direção você pode ir para manter a mesma temperatura?

Exercício 11. O fundo de uma caixa retangular custa duas vezes mais (por unidade de área) que os lados e a tampa da caixa. Dado o volume, encontre as dimensões da caixa que irão minimizar o custo.

Exercício 12. Encontre os valores máximo e mínimo da função

$$f(x,y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$

Exercício 13. Encontre os os valores máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = xyze^{-x^2-y^2-z^2}$. Como você sabe que tais valores extremos existem?

Exercício 14. Encontre o volume da maior caixa retangular (com lados paralelos aos eixos coordenados) que pode ser inscrita dentro do elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Exercício 15. Use o método de multiplicadores de Lagrange para maximizar x^3y^5 sujeito a $x + y = 8$.

Exercício 13. Encontre a menor distância do ponto $(3, 0)$ à parábola $y = x^2$.

Exercício 16. Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z) = xyz$ na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Exercício 17. Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x+2y-3z$ no elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108$.

Exercício 18. Usando Multiplicadores de Lagrange, encontre a menor distância da origem ao plano $x + 2y + 2z = 3$. Observe que é possível encontrar a resposta apenas com um argumento geométrico.

Exercício 19. Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = senxcosy$ na região triangular fechada limitada pelos eixos coordenados e pela reta $x + y = 2\pi$.

Exercício 20. A temperatura nos pontos do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é dada por $T(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$. Encontre os valores máximo e mínimo da temperatura no disco.

Exercício 21. Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = xy - 2x$ no retângulo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Exercício 22. Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x + y^2z$ sujeito a $y^2 + z^2 = 2$ e $z = x$.

Exercício 23. Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z) = 4-z$ sobre o elipsoide formado pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 8$ e o plano $x + y + z = 1$.

Exercício 24. Encontre a menor distância da origem à superfície $xyz^2 = 2$.

Exercício 25. Encontre um vetor que é normal à curva $x^3 + xy + y^3 = 11$ no ponto $(1, 2)$.

Exercício 26. Encontre a equação do plano tangente para cada função $z = f(x, y)$ no ponto indicado:

a) $z = x^3 + y^3 - 6xy; (1, 2, -3)$

b) $z = cosxcosy; (0, \pi/2, 0)$

c) $z = cosxseny; (0, \pi/2, 1)$

Exercício 27. Encontre um vetor que é normal à superfície $cos(xy) = e^z - 2$ no ponto $(1, \pi, 0)$.

Exercício 28. Encontre os dois pontos no hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + 2y + z = 5$.

Exercício 29. Considere todos o retângulos com perímetro fixo p. Use multiplicadores de Lagrange para mostrar que o retângulo com área máxima é o quadrado.

Exercício 30. Encontre os extremos de $f(x, y) = 4x + 2y$ sujeito a $2x^2 + 3y^2 = 21$.

Exercício 31. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$.

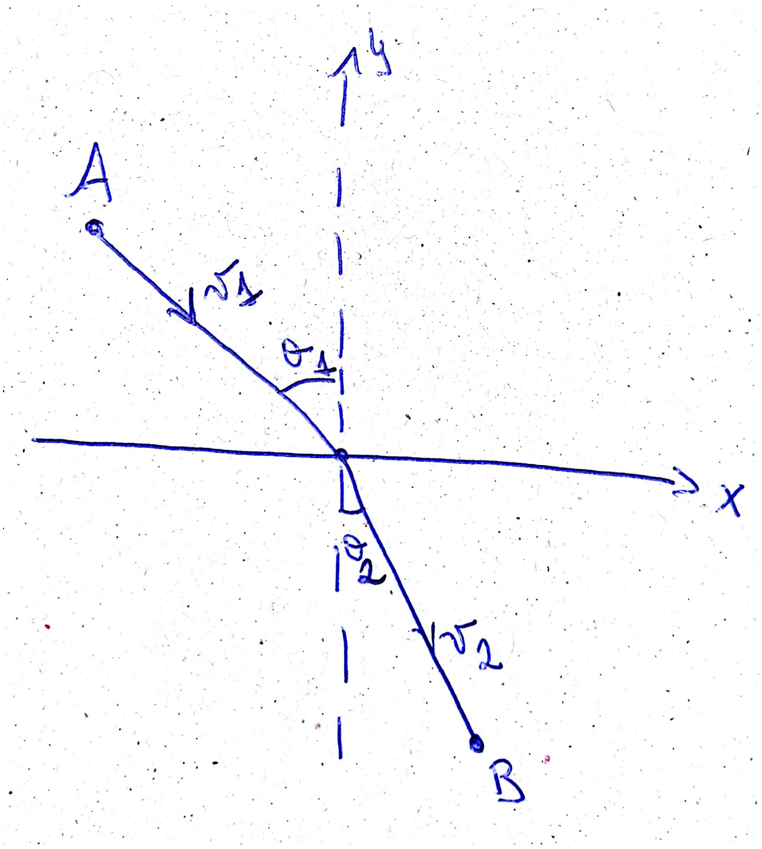
a) Verifique que $(0, 0, 0)$ é um ponto crítico de f.

b) Encontre todos os valores de k tal que f tem um mínimo local em $(0, 0, 0)$.

Exercício 32. (Lei de Snell) Um raio de luz viaja de um ponto A a um ponto B cruzando a interface (fronteira) entre dois meios isotrópicos diferentes, tais como água e vidro. No primeiro meio a velocidade é v_1 e no segundo ela é v_2. Mostre que a viagem é feita em tempo mínimo quando a Lei de Snell é satisfeita:

$$\frac{sen\ \theta_1}{sen\ \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Onde θ_1 e θ_2 são os ângulos de incidência. Veja a Figura a seguir.



y
A
v1
θ1
x
θ2
v2
B