



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Ari Patrick Pereira da Costa

Nova perspectiva sobre a não-localidade da caixa de Popescu e Rohrlich

Recife

2017

Ari Patrick Pereira da Costa

**Nova perspectiva sobre a não-localidade da caixa de
Popescu e Rohrlich**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho

Recife

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB 4-572

C837n Costa, Ari Patrick Pereira da.
Nova perspectiva sobre a não-localidade da caixa de Popescu e
Rohrlich / Ari Patrick Pereira da Costa. – 2017.
53 f.: fig.

Orientador: Fernando Roberto de Luna Parisio Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
Física, Recife, 2017.
Inclui referências e apêndices.

1. Mecânica quântica. 2. Teorema de Bell. I. Parisio Filho, Fernando
Roberto de Luna (Orientador). II. Título.

530.12 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2017-21

ARI PATRICK PEREIRA DA COSTA

**NOVA PERSPECTIVA SOBRE A NÃO-LOCALIDADE DA
CAIXA DE POPESCU E ROHRLICH**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 23/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ernesto Fagundes Galvão
Examinador Externo
Universidade Federal Fluminense

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Fernando Parisio, por me aceitar como seu aluno de mestrado, pela disposição e paciência em sanar minhas dúvidas mais básicas, por me guiar por este novo e desconhecido caminho da pesquisa científica e também pelos conselhos que vão além deste trabalho.

Agradeço a minha mãe, Rizethe, por me apoiar na minha vinda para Recife e pelas diversas ligações reconfortantes que não me fizeram desistir.

Agradeço ao meu grupo de laboratório, Márcio, Marcos, Ricardo, pelas conversas sobre física, e a Eulises pela sua imensa ajuda nos programas e pelas discussões sobre os mais diversos problemas.

Agradeço a minha recente namorada, Iasmin, que nos momentos que me encorajou nesta reta final do mestrado.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

O teorema de Bell possibilita uma abordagem quantitativa de um aspecto fundamental da Mecânica Quântica, a não localidade. Uma medida frequente para a não localidade é a violação numérica de uma dada desigualdade de Bell, o que, porém, pode levar a conclusões discutíveis. Neste trabalho investigaremos a não localidade de sistemas do tipo caixa de Popescu e Rohrlich (caixa PR), estrutura hipotética que produz a máxima violação algébrica da desigualdade CHSH, acima do limite atingido pela Mecânica Quântica, sem possibilitar comunicação supraluminal. Faremos esse estudo usando uma nova medida de não-localidade chamada volume de violação. Esta recente medida de não-localidade diz para quantificar não-localidade temos que levar em conta todas as possibilidades de medição sobre um estado quântico, dado experimento de Bell específico. Julgando apenas a intensidade da violação numérica somos levados a crer que a caixa PR é mais não-local do que estados quânticos maximamente emaranhados. O conceito de volume de violação mostra que isso não é necessariamente verdade.

Palavras-chave: Teorema de Bell. Não-localidade. Volume de violação. caixa PR.

Abstract

Bell's theorem allows for a quantitative approach to a fundamental aspect of Quantum Mechanics, nonlocality. A frequent measure of nonlocality is the numerical violation of a given Bell inequality, which, however, can lead to questionable conclusions. In this work we will investigate the non-locality of systems like the Popescu and Rohrlich box (PR box), hypothetical structures that produce the maximum algebraic violation of the CHSH inequality, above the limit reached by Quantum Mechanics, without enabling superluminal communication. We will do this study using a new measure of non-locality called volume of violation. This recent measure of non-locality says to quantify non-locality we have to take into account all possibilities of measurement on a quantum state, given specific Bell experiment. Based only on the intensity of the numerical violation we are led to believe that the PR box is more nonlocal than maximally entangled quantum states. The concept of volume of violation shows that this is not necessarily true.

key words: Bell's theorem. Nonlocality. Volume of violation. PR box.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Função de correlação $E(\theta)$, retirado de (POPESCU; ROHRLICH, 1994).	24
Figura 2	– Configuração no plano com $\theta_{ab} = \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \pi/12$ and $\theta_{a'b'} = \pi/4$. Então temos $ E_{PR}(\theta_{ab}) - E_{PR}(\theta_{a'b'}) + E_{PR}(\theta_{ab'}) + E_{PR}(\theta_{a'b}) = 4$, o valor máximo algébrico alcançado e acima do valor atingido pela mecânica quântica ($2\sqrt{2}$).	25
Figura 3	– Funções de correlação supra quânticas $E_\lambda(\theta)$ para (a) $\lambda = \pi/6$, (b) $\lambda = 11\pi/36$, e (c) $\lambda = 4\pi/9$	32
Figura 4	– Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do estado singleto (linha ponto-trazo), Caixa PR (linha trazo), e caixas- λ (curva contínua) para a desigualdade CHSH. As caixas- λ são menos não-locais do que o singleto se $\lambda < \tilde{\lambda}_{CHSH} = 0.934$ e mais não-locais que a caixa PR se $\lambda > 1.225$	34
Figura 5	– Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do estado singleto (linha ponto-trazo), Caixa PR (linha trazo), e caixas- λ (curva contínua) para a desigualdade 3322. As caixas- λ são menos não-locais que o singleto se $\lambda < \tilde{\lambda}_{CHSH} = 0.788$ e mais não-locais que a caixa PR se $\lambda > 1.154$	36
Figura 6	– Funções de correlação sub quânticas $E_a(\theta)$ para (a) $a = 0.5$, (b) $a = 0.7$, e (c) $a = 1$	37
Figura 7	– Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do singleto quântico (linha ponto-trazo) e caixas- a (linha contínua) para a desigualdade CHSH. Todos os valores de a produzem violação máxima restrita a $2 < I_{CHSH} \leq 2\sqrt{2}$	39
Figura 8	– Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do singleto quântico (linha ponto-trazo) e caixas- a (linha contínua) para a desigualdade 3322. Todos os valores de a produzem violação máxima restrita a $4 < I_{3322} \leq 5$	39
Figura 9	– Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do estado σ com respeito a desigualdade CHSH (linha pontilhada) e da desigualdade 3322 (linha tracejada).	42

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	DESIGUALDADES DE BELL	12
2.1	Argumento EPR	12
2.2	Teorema de Bell	14
2.3	Desigualdade CHSH	16
2.4	Desigualdade 3322	18
2.5	Experimentos e Loopholes	19
3	CAIXA DE POPESCU E ROHRLICH	21
3.1	Condição de Não-Sinalização	21
3.2	Função de correlação “supersinglete”	23
4	VOLUME DE VIOLAÇÃO	27
4.1	Introdução	27
4.2	Primeira desigualdade de Bell	29
4.3	Desigualdade CHSH: caixa PR vs singlete quântico	30
4.4	Não-localidade de uma família de caixas supra quânticas	32
4.4.1	Volume de violação com respeito à desigualdade CHSH	34
4.4.2	Volume de violação com respeito à desigualdade 3322	34
4.5	Não-localidade de uma família de caixas sub quânticas	37
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	40
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A – SIMETRIA ESFÉRICA DO ESTADO SINGLETO	46
	APÊNDICE B – CÓDIGO PARA CALCULAR O VOLUME DE VIOLAÇÃO	47

1 Introdução

É unânime que a mecânica quântica é uma teoria fundamental bem sucedida que é aplicada em muitos sistemas físicos. Até hoje não houve um experimento que a invalidasse. Entretanto, algumas conclusões tiradas da mecânica quântica nos fizeram questionar alguns conceitos, do ponto de vista da física clássica, sobre a natureza.

Um dos conceitos que necessitou de uma reavaliação foi o de localidade. O princípio da localidade está associado a não existência de “ação a distância”. A mecânica quântica não satisfaz esse princípio, mas esta “ação” não pode ser usada para transmitir informação acima da velocidade da luz. Ou seja, a mecânica quântica não viola causalidade relativística. A não-localidade da mecânica quântica está intimamente relacionada com o conceito de emaranhamento, que foi percebido já em 1935 por Schrödinger (SCHRÖDINGER, 1935). O que o emaranhamento diz é que não podemos descrever isoladamente um sistema físico quando este sistema está “ligado” de alguma forma com outro sistema. Usando este conceito, Einstein, Podolski e Rosen (EPR) elaboraram um argumento que levanta a questão de a mecânica quântica fugir de alguns pilares da física clássica, realismo e localidade, questionando assim a completeza da teoria (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). Quase 30 anos depois, Bell (BELL, 1964) mostrou em seu famoso teorema que o realismo e localidade, juntos, não podem reproduzir o mesmo sucesso experimental da mecânica quântica. O excelente artigo de revisão (MAUDLIN, 2014) expõe os argumentos de EPR, passando pela visão de Bohr, até chegar na contribuição de Bell.

Dependendo da perspectiva sobre a não-localidade, pode-se encontrar algumas peculiaridades. Notamos que a não-localidade é um conceito muito presente quando falamos sobre mecânica quântica. Então, será que a não-localidade pode ser usada como um axioma da mecânica quântica? Popescu e Rohrlich responderam negativamente a esta pergunta. Eles definiram um sistema (Caixa de Popescu e Rohrlich) que não está presente na natureza e satisfaz causalidade relativística, é mais não-local do que a mecânica quântica (do que a própria natureza), usando-se como medida de não-localidade a máxima violação algébrica de uma desigualdade de Bell (POPESCU; ROHRLICH, 1994). Popescu (POPESCU, 2014) faz um análise interessante sobre diferentes aspectos no que diz respeito à investigação deste artefato teórico.

Com o avanço da teoria da informação quântica, passou-se a cogitar a não-localidade

quântica como um possível recurso para realizar protocolos de comunicação (QUINTINO, 2010). Uma abordagem da não-localidade como um recurso, fazendo uma comparação com emaranhamento pode ser encontrada em (VICENTE, 2014), bem como algumas medidas conhecidas de não-localidade. O artigo de revisão (BUHRMAN et al., 2010) trata de uma relação entre a não-localidade e complexidade de comunicação. Um panorama geral sobre a não-localidade, medidas utilizadas para quantificá-la, perspectivas em teoria da informação quântica e questões de fundamentos da mecânica quântica podem ser encontradas em (BRUNNER et al., 2014).

É natural querer quantificar os recursos que se tornam importante na teoria física, neste caso a não-localidade não foge a esta regra. Associar o valor numérico de violação ao grau de não-localidade é um ponto discutível. O valor numérico de violação de uma desigualdade de Bell dá um limite inferior para a comunicação necessária para simular a violação usando variáveis ocultas locais (PIRONIO, 2003). As desigualdades de Bell, no geral, separam as teorias de variáveis escondidas realistas locais da mecânica quântica. Digamos que um estado ρ é mais não-local do que um estado σ (assume-se também que ambos os estados violem uma mesma desigualdade de Bell), usando o critério de valor algébrico de violação. Ora, uma vez havendo violação de uma desigualdade de Bell, ambas as violações necessitam de “ação instantânea a distância” para explicar as correlações. Então, mesmo que estados diferentes que violem uma dada desigualdade de Bell por valores diferentes, eles apresentam o mesmo conteúdo não-local. É bom deixar claro que há várias desigualdades de Bell, logo não-localidade não é quantificável só por 1 parâmetro, por exemplo, violação de 1 desigualdade específica. Neste espírito, uma proposta recente de quantificar não-localidade leva em conta todas configurações experimentais em algum contexto de Bell, e contabiliza apenas aquelas que violam realismo local. O que importa é apenas saber se, para uma dada configuração específica, o estado é local ou não-local, com respeito a alguma desigualdade. Denominamos tal medida de *Volume de Violação* (FONSECA; PARISIO, 2015; PARISIO, 2016; COSTA; PARISIO, 2016).

Nesta dissertação, investigamos sistemas do tipo caixa PR, aos quais nos referiremos como caixas de correlação, usando a medida de não-localidade volume de violação, que deu origem ao artigo aceito para publicação em (COSTA; PARISIO, 2016). Uma descrição de cada capítulo será apresentada a seguir.

No capítulo 2, revisamos o argumento de EPR em algum detalhe e em seguida apresentamos o teorema de Bell. São colocadas as duas desigualdades usadas no trabalho, a desigualdade CHSH e a desigualdade 3322. Por fim, faremos uma breve descrição de alguns testes experimen-

tais em desigualdades de Bell.

No capítulo 3, abordamos a caixa PR, mostrando suas propriedades, como não-sinalização e máxima violação numérica da desigualdade CHSH, este último indicando que a caixa PR seria mais não-local do que a mecânica quântica, segundo o valor numérico de violação da função de Bell¹.

No capítulo 4, apresentamos com detalhes a ideia da proposta do volume de violação, mostrando resultados recentes usando esta medida. Em seguida, propomos um família de caixas de correlação parametrizadas que contém os mesmos requisitos da caixa PR original. Ao aplicar a medida do volume de violação a estas caixas, verificamos que, mesmo alcançando o limite algébrico máximo, não podemos concluir necessariamente que todas as caixas parametrizadas são mais não-locais do que a mecânica quântica.

No capítulo 5, as conclusões mais específicas sobre o trabalho e futuras perspectivas da dissertação são apresentadas.

¹ Entende-se por função de Bell a soma das correlações limitadas pelo valor do limite local de uma desigualdade de Bell específica.

2 Desigualdades de Bell

2.1 Argumento EPR

Desde o surgimento da mecânica quântica, muitos questionam os princípios que regem a teoria. Um bom exemplo são os famosos debates entre Einstein e Bohr nos congressos de Solvay (1927 e 1930). Em 1935, Einstein, Podolski e Rosen propõem um último desafio ou teste para a mecânica quântica (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). Este foi o ponto inicial para posteriores investigações nos fundamentos da mecânica quântica.

Como a mecânica quântica previa muitos resultados em concordância com os experimentos, alguns poucos pesquisadores à época discutiam questões fundamentais da teoria. Apesar de seu amplo sucesso experimental, havia algumas estranhezas. Uma das mais conhecidas é o emaranhamento. Falando em poucas palavras, o emaranhamento nos diz que pode haver mais informação num sistema global do que em suas partes. Ou seja, a soma das partes não é o mesmo que o todo. Foi usando o conceito de emaranhamento que EPR (Einstein-Podolski-Rosen) formularam seu paradoxo, ou melhor, argumento. O objetivo era mostrar, por meio de algumas premissas simples, que a mecânica quântica era uma teoria incompleta.

O *Gedankenexperiment* (Experiência de Pensamento) original (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935) envolve as grandezas posição e momento. Vamos aqui nos concentrar na versão dada por David Bohm (BOHM; AHARONOV, 1957). Nesta versão faz-se uso de observáveis de momento angular de spin, o que não prejudica o argumento.

Haviam dois pontos levantados por EPR. O primeiro diz respeito ao fato de uma teoria física ser correta. O segundo questiona se essa teoria descreve de maneira completa a natureza. O primeiro ponto é mais simples de abordar. Basta verificar se os resultados experimentais estão de acordo com o previsto pela teoria, em caso afirmativo, a teoria é dita correta. Esse não é o ponto focado por EPR. Não havia dúvidas quanto à mecânica quântica ser correta à luz dos experimentos. Mas e quanto à teoria ser dita completa? Para EPR há uma realidade física independente de nossa observação (realismo). Neste ponto EPR define o que é elemento de realidade física. Se pudermos, sem perturbar o sistema, prever com 100% de certeza o resultado da medição de uma grandeza física, essa grandeza é um elemento de realidade física.

Este ponto será o alvo de EPR para argumentar que a mecânica quântica é incompleta. Por último, e não menos importante, EPR assume o princípio da localidade como inerente a qualquer fenômeno físico e que deve prevalecer na mecânica quântica. Um evento não pode influenciar instantaneamente um outro evento que esteja arbitrariamente distante.

Agora vamos ao argumento em si. Considere que duas partículas de spin- $\frac{1}{2}$ estão emaranhadas e tão afastadas quanto necessário. Uma partícula está com A (Alice) e outra com B (Bob). Suponha que o estado emaranhado compartilhado é o singleto, dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle^{(A)}|-\rangle^{(B)} - |-\rangle^{(A)}|+\rangle^{(B)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad (2.1)$$

onde o estado está escrito na base de autovetores de σ_z . Um fato importante é que o singleto tem a mesma estrutura em qualquer base, ou seja, é esfericamente simétrico. No apêndice A, mostraremos esta característica peculiar do estado singleto, usando rotações gerais de um sistema de spin- $\frac{1}{2}$ presentes no capítulo 3 de (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011). Alice pode fazer as medidas $\sigma_z^{(A)}$ ou $\sigma_x^{(A)}$ e Bob $\sigma_z^{(B)}$ ou $\sigma_x^{(B)}$. Note que o singleto é perfeitamente anticorrelacionado, ou seja, se Alice medir $\sigma_z^{(A)}$ e obtiver o resultado $+$, sabe-se que o estado compartilhado é $|+-\rangle$. A simetria esférica torna esta anticorrelação válida para qualquer direção \mathbf{n} .

Assumindo que Alice e Bob têm uma hora marcada para realizarem suas medidas, e como estão muito distantes não há qualquer comunicação entre os dois antes da medida. Suponha que Alice mediu o observável $\sigma_z^{(A)}$ e obteve o resultado $+$. Logo, podemos concluir com certeza de 100% e sem perturbar o sistema que o estado comum é $|+-\rangle$. Com isso, $\sigma_z^{(B)}$ é um elemento de realidade física, de acordo com EPR. Se Alice resolve medir $\sigma_x^{(A)}$, e, como o singleto é esfericamente simétrico, o mesmo raciocínio se aplica, levando à conclusão de que $\sigma_x^{(B)}$ é um elemento de realidade física. Mas, de acordo com a mecânica quântica, $[\sigma_z^{(B)}, \sigma_x^{(B)}] \neq 0$, ou seja, o fato de 2 observáveis não comutantes serem elementos de realidade física leva a concluir que a mecânica quântica é uma teoria incompleta. No último parágrafo de (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935), EPR expressam sua crença na existência de uma teoria mais completa que a mecânica quântica que preserve realismo e localidade. Esta teoria, que incorporaria a mecânica quântica, seria composta de um conjunto de parâmetros, chamados de variáveis escondidas (ou “ocultas”) (BELL, 1966). Note que o fato das variáveis escondidas serem inacessíveis num certo momento não as tornam inacessíveis por princípio. Avanços conceituais e/ou tecnológicos podem fazer variáveis escondidas tornarem-se variáveis acessíveis.

Até aqui o argumento tem uma visão qualitativa. Mas em 1964, Bell (BELL, 1964) colocou o argumento de forma quantitativa. E, portanto, podemos verificar se há um teoria mais completa que a mecânica quântica, satisfazendo os critérios de EPR.

2.2 Teorema de Bell

O Teorema de Bell (BELL, 1964) colocou o argumento EPR em termos quantitativos e mensuráveis. Ao assumir a existência de uma teoria realista-local, verificou-se que tal teoria não pode ser compatível com todos os resultados previstos pela mecânica quântica. Continuaremos usando a versão de Bohm do argumento EPR.

Consideramos novamente 2 partículas de spin- $\frac{1}{2}$ distantes uma da outra, uma com Alice e outra com Bob. Bell considerou a existência de uma teoria de variáveis escondidas realista e local. Vamos nomear este conjunto de variáveis de λ . Levando em conta também que a mecânica quântica é correta. Considere o resultado $A(\mathbf{a}, \lambda)$ associado a medição de $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)}$, onde 1 indica o espaço de Hilbert de Alice e \mathbf{a} é o versor associado uma orientação específica de medida de spin. Dados λ e \mathbf{a} , o resultado fica completamente determinado:

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1.$$

Considere uma grandeza completamente análoga para Bob, associada à medição de $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$, onde 2 indica o espaço de Hilbert de Bob:

$$B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1.$$

O fato de A não depender da direção de \mathbf{b} e B não depender de \mathbf{a} é onde se encontra a consideração de tal teoria ser local.

Desejamos calcular a correlação:

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \rangle \equiv E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (2.2)$$

onde a média é feita no estado *singlete*.

Como qualquer teoria mais completa deve concordar com os resultados estatísticos da Mecânica Quântica então devemos exigir:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \quad (2.3)$$

onde Γ é o espaço de todos os valores de λ e $\rho(\lambda)$ é a densidade de probabilidade de ocorrência destes valores, que nos é possivelmente desconhecida. Devido à propriedade de anticorrelação perfeita do estado singleto, temos

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1.$$

Como $\rho(\lambda)$ é normalizada:

$$\int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (2.4)$$

Usando (2.3), a única possibilidade é que, no caso $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, tenhamos

$$A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{a}) = -1 \quad \Rightarrow \quad A(\lambda, \mathbf{a}) = -\frac{1}{B(\lambda, \mathbf{a})} \quad (2.5)$$

para todos os λ 's em Γ .

Como $B = \pm 1$, podemos simplesmente escrever

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = -B(\lambda, \mathbf{a}).$$

Portanto

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\lambda, \mathbf{a})A(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a})A(\lambda, \mathbf{c})] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) \left[1 - \frac{A(\lambda, \mathbf{c})}{A(\lambda, \mathbf{b})} \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) \left[\underbrace{1 - A(\lambda, \mathbf{b})A(\lambda, \mathbf{c})}_{=0 \text{ ou } 2 \geq 0} \right] \\ |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\lambda, \mathbf{b})A(\lambda, \mathbf{c})] \\ |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\leq 1 + E(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

que é a primeira desigualdade de Bell.

Note que esta desigualdade é válida apenas quando há anticorrelação perfeita (para todas as direções). Podemos agora confrontar as previsões da mecânica quântica com as de uma teoria de variáveis escondidas local e determinística (qualquer), que deve satisfazer (2.6). Para o estado singleto

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\cos(\theta_{ab}) \quad (2.7)$$

onde θ_{ab} é o ângulo formado entre os eixos \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Considere agora que \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} estão em um mesmo plano e separados por 60° , respectivamente. Logo, substituindo na desigualdade:

$$\left| -\frac{1}{2} - \left(+\frac{1}{2} \right) \right| \leq 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}.$$

Podemos então estabelecer o teorema de Bell: Não existe teoria de variáveis escondidas locais e realistas compatíveis com todos os resultados da mecânica quântica.

É importante chamar atenção que este é apenas um possível cenário de Bell¹: 2 partes (Alice e Bob) com 2 possíveis medidas por partes e 2 possíveis resultados para cada medição². Na próxima seção teremos o mesmo cenário, a única diferença é que agora não há mais o vínculo de medidas serem feitas na mesma direção, como na primeira desigualdade de Bell.

2.3 Desigualdade CHSH

Vamos agora apresentar a desigualdade de Bell mais utilizada em testes experimentais. Na seção anterior utilizamos a seguinte quantidade para apresentar o argumento de Bell (2.3):

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda)$$

onde λ descreve o estado hipoteticamente completo do sistema. Em 1971, estimulado pela dedução original da desigualdade CHSH (CLAUSER et al., 1969), Bell argumentou que os próprios aparatos de medição podem ter suas próprias variáveis escondidas, que poderiam influenciar no resultado final, dando uma maior generalização. Neste caso, seria preferível trabalhar com médias,

$$\bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) = \int d\lambda' \nu(\lambda') A(\mathbf{a}, \lambda, \lambda'), \quad (2.8)$$

onde λ' são variáveis escondidas associadas aos aparatos, com distribuição $\nu(\lambda')$. Podemos redefinir (2.3) como:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) = \int d\lambda \rho(\lambda) \int d\lambda' \nu(\lambda') A(\mathbf{a}, \lambda, \lambda') B(\mathbf{b}, \lambda, \lambda') \quad (2.9)$$

onde a influência das supostas variáveis do aparato foi estatisticamente eliminada e

$$|\bar{A}| \leq 1 \quad , \quad |\bar{B}| \leq 1.$$

¹ Um cenário de Bell é definido pelo número de observadores ou partes, número de medições por cada parte e pelo número de possíveis resultados de cada medição (BRUNNER et al., 2014).

² No caso da primeira desigualdade de Bell, Alice e Bob vinculam uma medida de cada um será feita na mesma direção sempre.

Vale notar que estas relações continuam válidas se levarmos em conta eventos de não detecção ($|\bar{A}| = |\bar{B}| = 0$), o que não foi considerado na dedução original da desigualdade CHSH. Agora vamos apresentar a dedução dada por Bell (BELL, 2004).

Considerando a seguinte diferença,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) - \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda) [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \end{aligned}$$

onde na última linha apenas somamos e subtraímos o termo

$$\int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda).$$

Usando $|x - y| \leq |x| + |y|$, obtemos

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda)] \right| \\ &\quad + \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda) [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \right| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \underbrace{|\bar{A}(\mathbf{a}, \lambda)| |\bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)|}_{\leq 1} [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda)] \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) \underbrace{|\bar{A}(\mathbf{a}, \lambda)| |\bar{B}(\mathbf{b}', \lambda)|}_{\leq 1} [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}', \lambda)] + \int d\lambda [1 \pm \bar{A}(\mathbf{a}', \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \\ &\leq 2 \pm [E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b})] \\ |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| - 2 &\leq \pm [E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b})] \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tomando o sinal '+', podemos escrever

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| - 2 &\leq E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \\ \underbrace{2 - |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')|}_{\geq 0} &\geq E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \\ 2 - |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\geq |E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b})| \end{aligned}$$

Então temos a segunda desigualdade deduzida por Bell:

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b})| \leq 2. \tag{2.11}$$

Note que se fizermos $a' = b'$ obtemos

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |-1 + E(\mathbf{b}', \mathbf{b})| &\leq 2 \\ |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + 1 - E(\mathbf{b}', \mathbf{b}) &\leq 2 \\ |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq 1 + E(\mathbf{b}', \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

que é exatamente a primeira desigualdade de Bell.

A desigualdade CHSH é obtida usando-se apenas o sinal ‘-’ em (2.10), ou seja

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq 2 - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \\ |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) &\leq 2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Podemos escreve-la sem utilizar módulos lembrando que

$$|A| \leq 2 - B \quad \rightarrow \quad A \leq 2 - B \text{ se } A > 0 \quad \Rightarrow \quad A + B \leq 2.$$

Se $A < 0 \rightarrow -A + B \leq 2 \rightarrow A - B \geq -2$. Como $B \in [-2, 2]$, a desigualdade $A - B \geq -2$ vale para $-B: \Rightarrow A + B \geq -2$. Então,

$$-2 \leq E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \leq 2. \quad (2.14)$$

2.4 Desigualdade 3322

Conforme vimos na seção anterior, a desigualdade CHSH é caracterizada por 2 observáveis em cada parte (Alice e Bob) e 2 partículas de 2 níveis (spin para “cima” ou “baixo”). É natural agora considerar 3 observáveis em ambas as partes (ŚLIWA, 2003; COLLINS; GISIN, 2004). Nesse caso chamaremos de desigualdade 3322. É importante ressaltar que esta desigualdade é fisicamente relevante, já que há estados que nunca violam a CHSH e violam a 3322 (COLLINS; GISIN, 2004). O estado misto apresentado em (COLLINS; GISIN, 2004),

$$\sigma = 0.85 |\chi\rangle\langle\chi| + 0.15 |01\rangle\langle 01|, \quad (2.15)$$

onde

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|00\rangle + |11\rangle),$$

é um estado que não viola a CHSH, para qualquer configuração, mas viola a 3322.

Agora vamos para o formato de correlação da I_{3322} (ŚLIWA, 2003):

$$I_{3322} = -E(\mathbf{a}) - E(\mathbf{a}') + E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}'') + \\ + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'') + E(\mathbf{a}'', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}'', \mathbf{b}') \leq 4. \quad (2.16)$$

Neste caso, o limite quântico é 5.0. Assim como a CHSH, a 3322 é maximamente violada para o estado singleto.

2.5 Experimentos e Loopholes

O teorema de Bell possibilitou sair do campo puramente argumentativo para testes experimentais que comprovem ou não a completeza da Mecânica Quântica. Em (FREEDMAN; CLAUSER, 1972) um experimento medindo correlações entre a polarização de fótons emaranhados foi o primeiro que indicava a impossibilidade de uma teoria de variáveis escondidas locais.

Mesmo não sendo os primeiros, os experimentos de Aspect e seu grupo (ASPECT; DALIBARD; ROGER, 1982; ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1981) foram o divisor de águas nos experimentos referentes a testar a completude da mecânica quântica. Esses experimentos, usando a desigualdade CHSH, mostraram que não há uma teoria de variáveis escondidas locais que reproduza todos os resultados da mecânica quântica.

É claro, havia críticas decorrentes do fato de as correlações observadas não terem um caráter não-local, devido a algumas possíveis “saídas”. Estas “saídas” são chamadas de *loopholes*. Esses *loopholes* dizem que talvez as correlações observadas poderiam estar englobadas em uma teoria de variáveis escondidas locais. Os dois principais *loopholes* são o da localidade e o da detecção. O *loophole* da localidade, fechado em (WEIHS et al., 1998), está relacionado com o fato de medidas feitas por um observador poderem, em princípio, influenciar nos resultados de medição de outro observador, devido aos mesmos estarem separados por um intervalo tipo tempo. Este *loophole* é resolvido se os observadores estiverem separados por um intervalo tipo espaço. O *loophole* da detecção está relacionado com a baixa eficiência na detecção das partículas elementares, por exemplo, elétrons e, principalmente, fótons. Vamos supor o seguinte: digamos que existe uma variável escondida λ que tem dois possíveis valores λ_1, λ_2 . Digamos que λ_1 está relacionado com os fótons que são mais facilmente detectados e que contribuem mais para a violação de uma desigualdade de Bell e λ_2 associado aos fótons dificilmente detectados e

que contribuem para a não violação de desigualdade de Bell. Isto indica que o *loophole* pode ser resolvido se pudermos fazer com que os detectores detectem uma maior porcentagem de partículas, de tal modo que, mesmo que todos os fótons não detectados sejam do tipo λ_2 , ainda haverá violação do realismo local; e este *loophole* também foi fechado (ROWE et al., 2001).

O ponto em questão é o fechamento de ambos os *loopholes* em um mesmo experimento (*loophole-free*). Recentemente, alguns experimentos vieram sentenciar, sem nenhuma “saída”, a natureza não-local da mecânica quântica. Em (HENSEN et al., 2015) mostrou-se violações da desigualdade CHSH com spins de elétrons a uma distância de 1,3 km. O fato de elétrons serem mais facilmente detectados que fótons (permitindo ter uma maior amostragem e assim dar mais confiança aos resultados) e que o intervalo de tempo entre as medidas ser menor que $t = \frac{1300}{300000}s \approx 0,0043s$ levou o fechamento simultâneo dos *loopholes* da detecção e da localidade. Em (GIUSTINA et al., 2015; SHALM et al., 2015) também são mostrados resultados referentes ao fechamento dos *loopholes*.

3 Caixa de Popescu e Rohrlich

A teoria da relatividade restrita está alicerçada em 2 axiomas¹, a partir dos quais é possível obter toda a teoria. Por mais que a mecânica quântica tenha seus axiomas e seja contemporânea à teoria da relatividade no início do século XX, uma possível pergunta seria: há algum axioma, referente à teoria da relatividade, presente na mecânica quântica?

A formulação da mecânica quântica é baseada por um número de axiomas, que são encontradas em livros-texto como “Quantum Mechanics” de Cohen-Tannoudji, Diu, Laloë ou “Modern quantum mechanics” de J.J. Sakurai. Estes postulados são colocados de forma que sejamos capazes de reproduzir ou prever o resultado de diversos experimentos.

A não-localidade está presente na teoria. Será ela uma candidata a axioma da mecânica quântica? Com esta motivação, Popescu e Rohrlich colocaram o status de princípio quântico na não-localidade, e perguntaram o que não-localidade (violação de desigualdade de Bell) e causalidade relativística (não-sinalização), já presente na mecânica quântica, juntas implicam (POPESCU; ROHRLICH, 1994).

Na próxima seção, apresentamos como foi introduzida a questão da causalidade relativística com o objetivo de alcançar a mecânica quântica. Em seguida, mostramos as consequências de assumir esses 2 axiomas e qual conclusão foi tirada.

3.1 Condição de Não-Sinalização

Voltamos a um típico experimento de Bell: Alice e Bob estão cada um em seus laboratórios, de modo que o intervalo de tempo das medidas seja menor ou igual ao intervalo de tempo entre a comunicação de Alice e Bob, que se dá no máximo com a velocidade da luz. Este é um ponto importante, pois garante que, quando Alice fizer alguma medida e obtiver um resultado, não seja possível envio de sinal que influencie em resultados no sistema de Bob. Isto garantirá que a causalidade relativística será preservada, ou seja, não-sinalização.

Usando a desigualdade CHSH, temos um sistema contendo duas partes. Sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 observáveis físicos que podem assumir valores $+1$ ou -1 , onde A_1 e A_2 são observáveis de

¹ As leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial e a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial.

uma parte do sistema (Alice) e B_1 e B_2 referem-se a observáveis da outra parte (Bob). Definimos $P_{A_i, B_j}(k, l)$ como a probabilidade conjunta de Alice medir A_i e obter o resultado k e Bob medir em B_j e obter l , onde $i, j = 1, 2$ e $k, l = 1, -1$. Assim, podemos escrever a correlação das medidas em ambas as partes como

$$E(A_i, B_j) = P_{A_i, B_j}(1, 1) + P_{A_i, B_j}(-1, -1) - P_{A_i, B_j}(1, -1) - P_{A_i, B_j}(-1, 1).$$

Qualquer teoria de variáveis escondidas locais, no contexto da desigualdade CHSH (2.13), está limitada até 2, dado um arranjo particular de medições:

$$|E(A_1, B_1) - E(A_1, B_2)| + E(A_2, B_2) + E(A_2, B_1) \leq 2. \quad (3.1)$$

Para algumas escolhas de observáveis e estado, estas correlações mostram violações acima de qualquer que seja a teoria de variáveis escondidas local e realista. Por mais que, matematicamente, possa ser alcançado o limite de 4 para CHSH, a mecânica quântica tem um limite abaixo: $2\sqrt{2}$ (CIREL'SON, 1980). Então por que a mecânica quântica não chega até 4?

É plausível que outro axioma, causalidade relativística, limite tais correlações até o limite quântico. Então, vamos analisar qual efeito tem a causalidade relativística nas probabilidades conjuntas. Pela causalidade relativística, se Alice medir o observável A_1 , a probabilidade para os resultados 1 e -1 serão independentes da escolha de medida de Bob. Logo, a probabilidade de Alice medir A_1 e obter resultado 1 quando Bob medir B_1 é

$$P_{A_1, B_1}(1, x) = P_{A_1, B_1}(1, 1) + P_{A_1, B_1}(1, -1) = P_{A_1}(1), \quad (3.2)$$

onde x denota que o resultado de B_1 é qualquer e $P_{A_1}(1)$ refere-se a probabilidade marginal ao medir A_1 e obter 1.

Ora, nada impede Bob de escolher B_2 em vez de B_1 . Como não há comunicação instantânea entre Alice e Bob (respeita causalidade relativística), não observa-se uma alteração instantânea nos resultados de Alice devido as medidas de Bob. Explicitamente,

$$P_{A_1, B_1}(1, x) = P_{A_1, B_2}(1, x) \quad (3.3)$$

$$P_{A_1, B_1}(1, 1) + P_{A_1, B_1}(1, -1) = P_{A_1, B_2}(1, 1) + P_{A_1, B_2}(1, -1). \quad (3.4)$$

Aí está a condição de não-sinalização. Isto vale para todas as outras possíveis combinações e não leva necessariamente, por exemplo, a

$$P_{A_1, B_1}(1, 1) = P_{A_1, B_2}(1, 1).$$

Considere o exemplo retirado de (POPESCU; ROHRLICH, 1994), o seguinte arranjo

$$\begin{aligned}
 P_{A_1, B_1}(1, 1) &= P_{A_1, B_1}(-1, -1) = P_{A_1, B_2}(1, 1) = P_{A_1, B_2}(-1, -1) \\
 &= P_{A_2, B_1}(1, 1) = P_{A_2, B_1}(-1, -1) = P_{A_2, B_2}(1, -1) \\
 &= P_{A_2, B_2}(-1, 1) = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

e as outras probabilidades feitas iguais a zero. Estas probabilidades satisfazem a condição de não sinalização (3.3) e a condição de normalização das probabilidades. Substituindo em (3.1), verifica-se que CHSH atinge seu limite algébrico máximo de 4. Ou seja, a causalidade relativística não limita a soma das correlações quânticas até $2\sqrt{2}$. Este conjunto de probabilidades conjuntas que violam maximamente a desigualdade CHSH é chamado de Caixas PR. Na próxima seção, apresentamos uma função de correlação que modela uma espécie de “supersinglete” e satisfaz os axiomas anteriores (POPESCU; ROHRLICH, 1994).

3.2 Função de correlação “supersinglete”

Considere um sistema hipotético, esfericamente simétrico, respeitando a causalidade, mas que não seja limitado por todas as leis da mecânica quântica, onde o sistema descrito é denominado de “supersinglete”². Popescu e Rohrlich (POPESCU; ROHRLICH, 1994) definiram uma função de correlação $E(\theta)$ onde os observáveis se definem por medidas de spin- $\frac{1}{2}$ em direções quaisquer. A hipótese assumida pelos autores de simetria esférica retrata que, assim como no singlete quântico, o ângulo θ entre os eixos de medida é mais relevante. A simetria esférica tem uma consequência importante na forma de $E(\theta)$: A integral da área sob a curva da função é nula, garantindo que a média dos resultados de medida de spin- $\frac{1}{2}$ é zero. Este modelo satisfaz os 2 axiomas propostos e mais uma qualidade peculiar do singlete da mecânica quântica, simetria esférica, e para algumas configurações de eixos apresenta violação algébrica máxima da desigualdade CHSH. A função mencionada tem o seguinte formato:

² Este termo “supersinglete” é devido a característica simetria esférica presente no estado singlete.

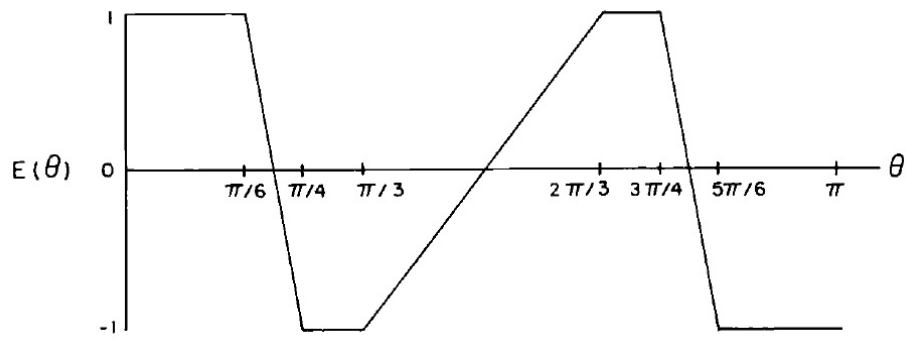


Figura 1 – Função de correlação $E(\theta)$, retirado de (POPESCU; ROHRLICH, 1994).

Na sua forma funcional, pode ser escrita como:

$$E_{PR}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \theta < \pi/6 \\ -\frac{24}{\pi}\theta + 5 & \text{para } \pi/6 \leq \theta < \pi/4 \\ -1 & \text{para } \pi/4 \leq \theta < \pi/3 \\ \frac{6}{\pi}\theta - 3 & \text{para } \pi/3 \leq \theta < 2\pi/3 \\ 1 & \text{para } 2\pi/3 \leq \theta < 3\pi/4 \\ -\frac{24}{\pi}\theta + 19 & \text{para } 3\pi/4 \leq \theta < 5\pi/6 \\ -1 & \text{para } 5\pi/6 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Considere, por exemplo, as 4 medidas ao longo dos eixos definidos por vetores unitários \mathbf{b}' , \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{a}' separados por ângulos sucessivos de $\frac{\pi}{12}$ e no mesmo plano conforme a figura 2.

Usando (2.13) temos

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \tag{3.6}$$

$$= |E_{PR}(\theta_{ab}) - E_{PR}(\theta_{a'b'})| + E_{PR}(\theta_{ab'}) + E_{PR}(\theta_{a'b}) \tag{3.7}$$

$$= |1 - (-1)| + 1 + 1 = 4 \tag{3.8}$$

que viola a desigualdade CHSH com o valor máximo de 4, ou seja, estas correlações propostas

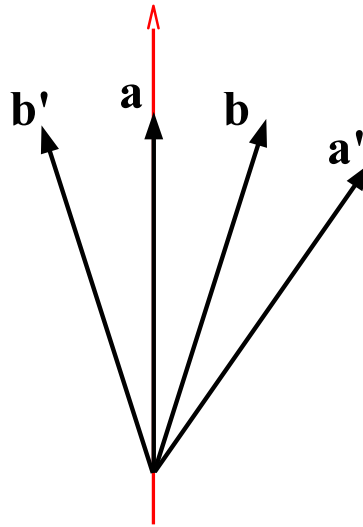


Figura 2 – Configuração no plano com $\theta_{ab} = \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \pi/12$ and $\theta_{a'b'} = \pi/4$. Então temos $|E_{PR}(\theta_{ab}) - E_{PR}(\theta_{a'b'})| + E_{PR}(\theta_{ab'}) + E_{PR}(\theta_{a'b}) = 4$, o valor máximo algébrico alcançado e acima do valor atingido pela mecânica quântica ($2\sqrt{2}$).

são mais não-locais que a mecânica quântica, segundo o critério usual que associa diretamente o valor numérico da violação com a “intensidade” de não-localidade.

É claro que esta função é hipotética e não descreve um sistema físico real. Porém serve para mostrar a possibilidade de uma função de correlação satisfazer não-sinalização e apresentar uma violação numérica máxima para desigualdade CHSH.

A proposta inicial era checar se não-localidade e causalidade relativística levam à mecânica quântica. Como a análise leva a uma violação maior que a da mecânica quântica, então conclui-se que os 2 axiomas não são suficientes. Há uma excelente discussão com respeito a novos direcionamentos sobre o assunto (POPESCU, 2014) e um panorama geral da caixa PR (SCARANI, 2006). Esta caixa PR é apenas uma dentro de uma classe de teorias de não-sinalização, cujas propriedades gerais podem ser encontradas em (MASANES; ACIN; GISIN, 2006). Uma configuração óptica foi proposta em (CHU et al., 2016) para simular a caixa PR, que mostra uma outra possível explicação de porque a caixa PR é incompatível com a mecânica quântica e não pode ser vista na natureza. Embora a caixa PR não esteja presente na natureza, há uma abordagem criativa para explicar as probabilidades da caixa PR usando o jogo Minecraft (SIMNACHER, 2016).

No próximo capítulo, iremos propor uma nova classe de funções de correlação que

satisfazem todos os requisitos anteriores. O que poderemos concluir ao analisar estas funções sob uma recente proposta de medida de não-localidade?

4 Volume de Violação

4.1 Introdução

Até aqui falamos de desigualdades de Bell, correlações, estados quânticos, violação algébrica máxima, caixa de Popescu e Rohrlich (caixa PR). Usando todos estes componentes chegamos a conclusões sobre a caixa PR com respeito à não-localidade. Conforme foi citado no último parágrafo do capítulo anterior ao usarmos outra forma de quantificar não-localidade, pode esperar-se as mesmas conclusões?

Apesar do emaranhamento ser melhor caracterizado (HORODECKI et al., 2009), não podemos dizer o mesmo a respeito da não-localidade. Este fato é devido ao emaranhamento poder ser definido e tratado apenas em termos matemáticos, enquanto que a não-localidade pode ser vista como uma manifestação física do emaranhamento no mundo tangível (COSTA; PARISIO, 2016; GISIN, 1991).

Em linhas gerais, uma desigualdade de Bell é um poderoso critério para avaliarmos se um estado quântico é local ou não-local. O último ingrediente necessário para avaliar a não-localidade é uma configuração específica dos aparatos de medida de Alice e Bob. No caso de medidas Stern-Gerlach, uma configuração é representada por um conjunto de eixos alinhados arbitrariamente, no qual cada eixo é localizado no espaço por 2 ângulos (polar e azimutal). A medida mais usual de não-localidade é associar maior violação numérica de uma desigualdade de Bell a maior grau de não-localidade.

Esta associação gerou algumas conclusões discutíveis. Por exemplo, usando a medida usual, surge a “anomalia da não-localidade” (MÉTHOT; SCARANI, 2007; ACÍN et al., 2002). A “anomalia” consiste no fato da desigualdade CGLMP (COLLINS et al., 2002) apresentar maior valor algébrico de violação para um estado não-maximamente emaranhado de 2 qubits.

Agora apresentamos uma recente proposta de quantificar não-localidade, denominada *Volume de Violação* (FONSECA; PARISIO, 2015; PARISIO, 2016). É fato que maior violação de uma desigualdade de Bell indica que mais correlacionado é o sistema (estado). O que não necessariamente pode ser estendido à não-localidade. Um estado ρ que apresenta maior violação numérica do que σ não influencia no fato de que ambos precisam de “ação à distância” para

explicar suas correlações. Com respeito à não-localidade, ambas as violações são equivalentes. Ou seja, dada uma configuração experimental em algum experimento de Bell, apenas podemos afirmar se o estado é local ou não-local.

Enquanto o valor numérico toma apenas a configuração que leva à máxima violação, o volume de violação leva em conta todas as configurações que produzem violação de uma desigualdade de Bell. Para o cálculo desta nova quantidade, para um estado particular, fazemos uma integração na região que leva a violação da desigualdade de Bell (MÉTHOT; SCARANI, 2007). De forma geral, podemos escrever

$$v(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Gamma} d^n x, \quad (4.1)$$

onde

$$V_T = \int_{\Lambda} d^n x. \quad (4.2)$$

Neste caso, estamos definindo o volume de violação relativo $v(\rho)$, que dá uma interpretação mais direta: Qual a probabilidade de violação de um estado, dada uma desigualdade de Bell, quando é feita uma escolha aleatória de configuração? Existem definições similares ao volume de violação, mas os autores não associaram à ela a não-localidade (LIANG et al., 2010; WALLMAN; LIANG; BARTLETT, 2011). Aqui Γ representa o conjunto de todos os parâmetros possíveis que determinam as configurações que levam à violação de uma dada desigualdade de Bell e Λ é o conjunto de todos os parâmetros que determinam todas configurações experimentais no contexto de Bell tratado ¹. Note que $d^n x$ vai apresentar o formato que dá pesos iguais para qualquer configuração. Deste modo, o estado ρ é mais não-local que o estado σ se $v(\rho) > v(\sigma)$. Também, se para o estado ρ o volume de violação é $v(\rho) = 0$, dizemos que o estado ρ é local com respeito a uma dada desigualdade. Seguindo o mesmo raciocínio, $v(\rho) = 1$ indica que ρ é maximamente não-local.

Ao aplicar o volume de violação, a “anomalia da não-localidade” deixa de existir para estados emaranhados de 3 e 4 níveis, ou seja, o máximo do volume de violação está associado ao estado maximamente emaranhado (FONSECA; PARISIO, 2015). Em (PARISIO, 2016) foi apresentado o cálculo analítico do volume de violação para o estado singleto para a primeira desigualdade de Bell.

No capítulo anterior, vimos que a caixa PR mostrou ser mais não-local do que o estado singleto (maximamente emaranhado de 2 níveis), com respeito à medida usual de não-localidade.

¹ Este fator de normalização V_T ou volume total é a integral em todos os ângulos sólidos referentes a cada eixo.

Será que o mesmo comportamento permanece ao aplicarmos agora o volume de violação?

4.2 Primeira desigualdade de Bell

Conforme mostrado anteriormente, a primeira desigualdade de Bell tem a forma (2.6):

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| - E(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 1.$$

Usando o estado singleto, podemos calcular cada correlação como (2.7):

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que o eixo \mathbf{a} pode ser mantido fixo numa direção do espaço ($\mathbf{a} = \mathbf{z}$) usando o fato de que o singleto quântico é esfericamente simétrico, ou seja, podemos escrever o cenário de eixos como:

$$\mathbf{a} = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{b} = (\sin \theta_b \cos \phi_b, \sin \theta_b \sin \phi_b, \cos \theta_b),$$

$$\mathbf{b}' = (\sin \theta_{b'} \cos \phi_{b'}, \sin \theta_{b'} \sin \phi_{b'}, \cos \theta_{b'}).$$

Usando o cenário acima, podemos escrever $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ como:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}') = |\cos \theta_{b'} - \cos \theta_b| + \sin \theta_b \sin \theta_{b'} \cos(\phi_{b'} - \phi_b) + \cos \theta_b \cos \theta_{b'}. \quad (4.3)$$

Como temos 2 eixos livres agora, o volume V_T é apenas $(4\pi)^2$. Assim, para o cálculo do volume de violação, escrevemos a integral a ser calculada como (PARRA, 2014):

$$v = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{S>1} d\Omega_b d\Omega_{b'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{S>1} \sin \theta_b \sin \theta_{b'} d\theta_b d\phi_b d\theta_{b'} d\phi_{b'}. \quad (4.4)$$

Para calcular o volume numericamente, basicamente avaliamos a função $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ em todas as configurações possíveis (numericamente não é possível ver todas, no sentido literal) e apenas contabilizamos as configurações que violam (2.6). A integração numérica de 4 dimensões é feita usando método de Monte Carlo. Foi usado para este cálculo numérico um número de 10^9 pontos². O método de integração apresenta um desvio padrão pequeno, que no caso do volume para a primeira desigualdade de Bell é da ordem de 10^{-6} , assim como nos demais resultados

² Entende-se por ponto uma configuração aleatória dos eixos, ou seja, um conjunto de valores para $(\phi_b, \theta_b, \phi_{b'}, \theta_{b'})$.

a seguir. Para o cálculo analítico da integral acima usou-se alguns argumentos para descartar algumas regiões que não levam a violação de (2.6) (PARISIO, 2016). O resultado exato é $1/3$, ou seja, numa escolha aleatória de configuração de eixos, a probabilidade de que a configuração selecionada viole a primeira desigualdade é $1/3$ (PARISIO, 2016).

Devido ao grande acordo entre o valor analítico e o valor numérico no caso em questão, usaremos no restante do trabalho este método de integração nas próximas seções.

4.3 Desigualdade CHSH: caixa PR vs singlete quântico

No capítulo anterior exploramos as probabilidades da caixa PR e, sob o critério de valor algébrico de violação, pôde-se concluir que as mesmas seriam mais não-locais que a mecânica quântica. Vamos empregar a definição (4.1) a este sistema e comparar com o resultado para o singlete. É simples calcular numericamente o volume de violação para o singlete quântico e a caixa PR no contexto experimental da desigualdade CHSH. Primeiramente, como ambos os sistemas (singlete e caixa PR) são esfericamente simétricos, escolhemos uma direção fixa das 4 envolvidas na desigualdade CHSH. Então, podemos escrever o cenário mais geral de medidas como:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{b} &= (\sin \theta_b \cos \phi_b, \sin \theta_b \sin \phi_b, \cos \theta_b), \\ \mathbf{a}' &= (\sin \theta_{a'} \cos \phi_{a'}, \sin \theta_{a'} \sin \phi_{a'}, \cos \theta_{a'}), \\ \mathbf{b}' &= (\sin \theta_{b'} \cos \phi_{b'}, \sin \theta_{b'} \sin \phi_{b'}, \cos \theta_{b'}).\end{aligned}$$

Para o cálculo do volume de violação do singlete, seguimos o raciocínio feito na seção anterior. Escrevemos a desigualdade CHSH (3.6), usando o cenário acima e com auxílio de (2.7), como:

$$\begin{aligned}S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') &= |-\cos \theta_b + \sin \theta_{a'} \sin \theta_{b'} \cos(\phi_{a'} - \phi_{b'}) + \cos \theta_{a'} \cos \theta_{b'}| \\ &\quad - \cos \theta_{b'} - \sin \theta_{a'} \sin \theta_b \cos(\phi_{a'} - \phi_b) - \cos \theta_{a'} \cos \theta_b.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Assim, a integral do volume de violação a ser calculada é dada por³ (PARRA, 2014):

$$v = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{S>2} d\Omega_b d\Omega_{b'} d\Omega_{a'} = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{S>2} \sin \theta_b \sin \theta_{b'} \sin \theta_{a'} d\theta_b d\phi_b d\theta_{b'} d\phi_{b'} d\theta_{a'} d\phi_{a'}.\quad (4.6)$$

³ Como existem 3 eixos livres o volume total neste caso é $(4\pi)^3$.

Em seguida, geramos aleatoriamente os valores para (ϕ_b, θ_b) , $(\phi_{a'}, \theta_{a'})$, e $(\phi_{b'}, \theta_{b'})$ e levamos em conta apenas as configurações que geram $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') > 2$. Assim como no caso da primeira desigualdade de Bell, usamos para o cálculo numérico 10^9 pontos. O resultado $v_S \approx 0.070799$, que está em excelente acordo com o resultado analítico $(\pi - 3)/2 \approx 7.0796\%$ obtido no material suplementar de (LIANG et al., 2010).

Para cálculo do volume de violação para a caixa PR, determinamos os ângulos entre os eixos conforme presente (3.6) na forma:

$$\begin{aligned}\theta_{ab} &= \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \theta_b, \\ \theta_{ab'} &= \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}') = \theta'_b, \\ \theta_{a'b} &= \arccos(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}) = \arccos[\sin \theta_{a'} \sin \theta_b \cos(\phi_{a'} - \phi_b) + \cos \theta_{a'} \cos \theta_b], \\ \theta_{a'b'} &= \arccos(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}') = \arccos[\sin \theta_{a'} \sin \theta_{b'} \cos(\phi_{a'} - \phi_{b'}) + \cos \theta_{a'} \cos \theta_{b'}].\end{aligned}$$

Assim, avaliamos a desigualdade

$$|E_{PR}(\theta_{a'b}) - E_{PR}(\theta_{a'b'})| + E_{PR}(\theta_{ab'}) + E_{PR}(\theta_{a'b}) \leq 2, \quad (4.7)$$

e calculamos o volume de violação (4.6) usando o mesmo procedimento para o estado singleto. Neste caso obtemos o valor de $v_{PR} \approx 0.180717$, que indica, de fato que, a caixa PR é mais não-local que o singleto quântico no experimento de CHSH, de acordo com o critério proposto (COSTA; PARISIO, 2016).

O resultado ainda mostra que a caixa PR é muito mais não-local sob à luz do volume de violação, uma vez que a razão entre os volumes de violação da caixa PR e o singleto é $v_{PR}/v_S \approx 2.5$, enquanto que a razão entre as violações máxima é $4/2\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1.4$.

É bom lembrar que a caixa PR é uma das possíveis funções que satisfaz causalidade e produz máxima violação algébrica de uma dada desigualdade. Um questionamento que podemos levantar é se esta tendência se mantém quando analisamos outras possíveis caixas PR. Na próxima seção veremos que esta tendência não se mantém.

4.4 Não-localidade de uma família de caixas supra quânticas

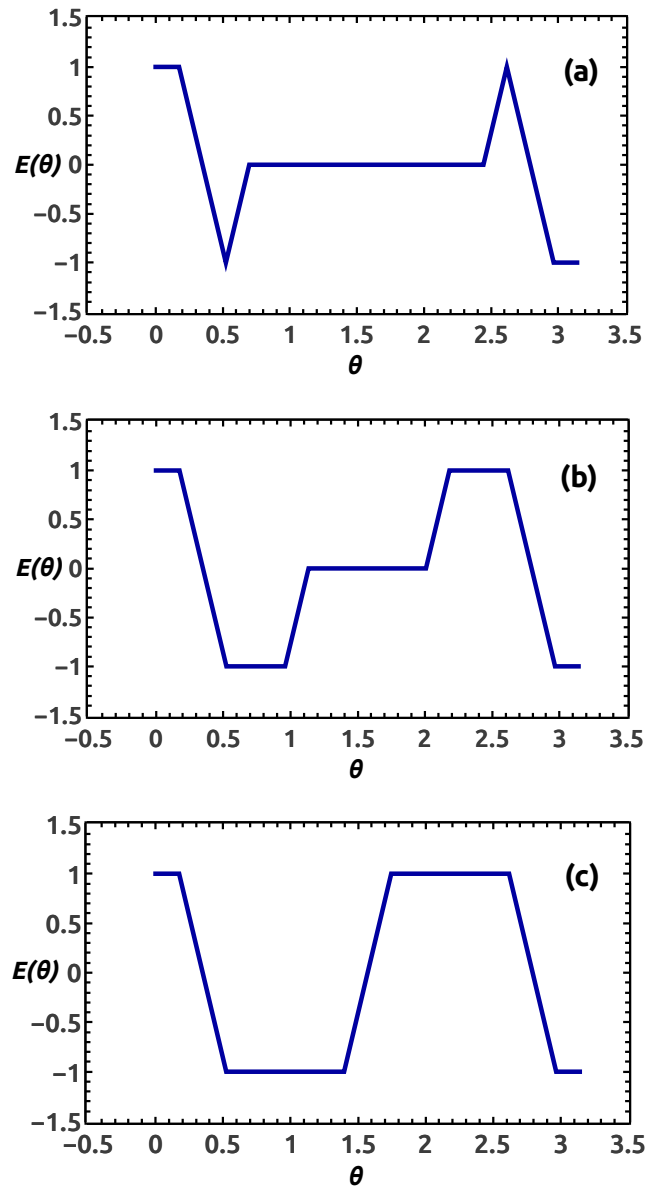


Figura 3 – Funções de correlação supra quânticas $E_\lambda(\theta)$ para (a) $\lambda = \pi/6$, (b) $\lambda = 11\pi/36$, e (c) $\lambda = 4\pi/9$.

Nesta seção definimos um família de caixas de correlação parametrizada por um número real $\lambda \in [\pi/6, 4\pi/9]$, isto é, $30^\circ \leq \lambda \leq 80^\circ$ (COSTA; PARISIO, 2016). Para *todos* os valores de λ nesse intervalo as caixas são esfericamente simétricas e produzem violação algébrica máxima da desigualdade CHSH (3.6). Então, ao associar o maior grau de não-localidade com a maior violação numérica, estas caixas são mais não-locais que o singlete quântico, e, tão não-locais quanto a caixa PR original, para todos os λ 's. A função de correlação supra quântica $E_\lambda(\theta)$ para

estes sistemas, que vamos chamar caixas- λ , é dada por:

$$E_\lambda(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \theta < \pi/18 \\ -\frac{18}{\pi}\theta + 2 & \text{para } \pi/18 \leq \theta < \pi/6 \\ -1 & \text{para } \pi/6 \leq \theta < \lambda \\ \frac{18}{\pi}(\theta - \lambda) - 1 & \text{para } \lambda \leq \theta < \lambda + \pi/18 \\ 0 & \text{para } \lambda + \pi/18 \leq \theta < 17\pi/18 - \lambda \\ \frac{18}{\pi}(\theta + \lambda) - 17 & \text{para } 17\pi/18 - \lambda \leq \theta < \pi - \lambda \\ 1 & \text{para } \pi - \lambda \leq \theta < 5\pi/6 \\ -\frac{18}{\pi}\theta + 16 & \text{para } 5\pi/6 \leq \theta < 17\pi/18 \\ -1 & \text{para } 17\pi/18 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Na figura 3 mostramos $E_\lambda(\theta)$ como função de θ para (a) $\lambda = \pi/6$ (30°), (b) $\lambda = 11\pi/36$ (55°), e (c) $\lambda = 4\pi/9$ (80°). É importante notar que, independente do valor de λ , para $\theta_{ab} = \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \pi/18$ e $\theta_{a'b'} = \pi/6$, a função de Bell na desigualdade (3.6) atinge o valor de 4.

4.4.1 Volume de violação com respeito à desigualdade CHSH

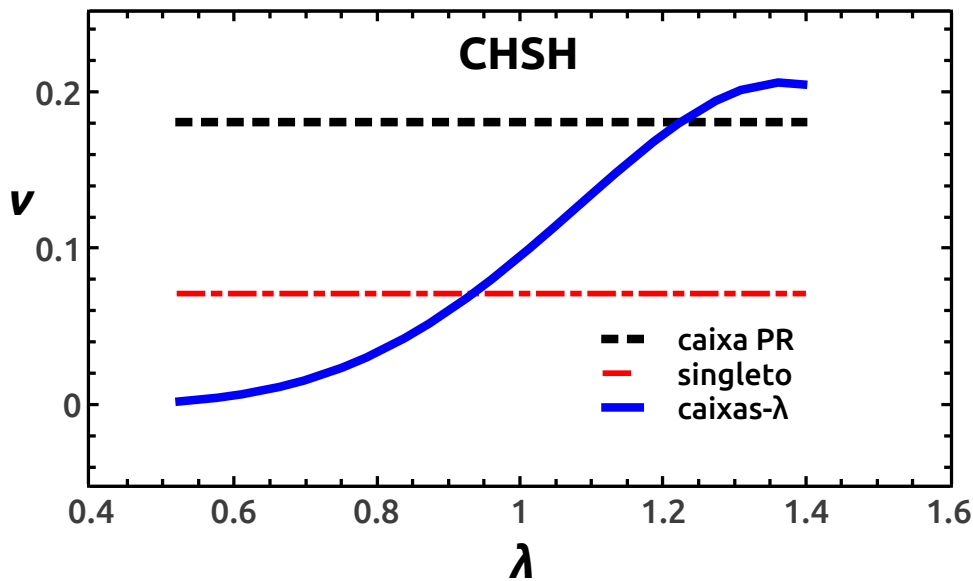


Figura 4 – Não-localidade, dada pela razão $\nu = V/V_T$, do estado singlete (linha ponto-traço), Caixa PR (linha traço), e caixas- λ (curva contínua) para a desigualdade CHSH. As caixas- λ são menos não-locais do que o singlete se $\lambda < \tilde{\lambda}_{CHSH} = 0.934$ e mais não-locais que a caixa PR se $\lambda > 1.225$.

Vamos empregar o mesmo procedimento numérico feito na seção 4.3 para determinar o volume de violação destas caixas, como função de λ . Os resultados são descritos na figura 4, de $\lambda = \pi/6 \approx 0.524$ até $\lambda = 4\pi/9 \approx 1.396$. As duas linhas horizontais dão os volumes de violação do singlete quântico (ponto-traço) e caixa PR (traço), enquanto a curva contínua representa a não-localidade associada às caixas- λ . Note que, abaixo de um certo valor de λ ($\lambda = \tilde{\lambda}_{CHSH} \approx 0.934$), as caixas- λ são menos não-locais que o singlete, segundo o volume de violação, mesmo com o valor máximo da desigualdade CHSH de 4 sendo alcançado para todas as caixas- λ . Além disso, as caixas- λ são mais não-locais que a caixa PR original para $\lambda > 1.225$ (COSTA; PARISIO, 2016).

4.4.2 Volume de violação com respeito à desigualdade 3322

Agora vamos avaliar o volume de violação no contexto da desigualdade 3322. Enfatizamos a importância dessa análise, uma vez que há estados quânticos (mistos) que não violam a desigualdade CHSH mas violam a desigualdade 3322, conforme citado na seção 2.4. Vamos considerar que os observáveis podem ser completamente descritos por três vetores unitários

arbitrários em cada parte, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'')$ e $(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'')$, onde podem ser escritos de forma análoga ao que fizemos na seção 4.2. A desigualdade 3322 é escrita, conforme (2.16), como:

$$I_{3322} = -E(\mathbf{a}) - E(\mathbf{a}') + E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}'') + \\ + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'') + E(\mathbf{a}'', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}'', \mathbf{b}') \leq 4,$$

onde as correlações com um argumento referem-se a medidas sobre somente uma das partículas e são nulas para estados esfericamente simétricos. Assim como na seção 4.3, queremos calcular o volume de violação para os dois sistemas em foco: para o estado singleto e a para caixa PR original. Em ambos os casos, a integração Monte Carlo é agora sobre os 5 eixos arbitrários (1 eixo é mantido fixo por simetria esférica), ou seja, $V_T = (4\pi)^5$ e o número de pontos usado é novamente 10^9 . Os volumes de violação para o singleto e para caixa PR original são, respectivamente, $v_S \approx 2.17 \times 10^{-3}$ and $v_{PR} \approx 2.69 \times 10^{-2}$. Nosso resultado é apresentado na figura 5. O comportamento é similar ao da figura 4, com caixas passando de menos não-locais para mais não-locais que o singleto à medida em que λ cresce. Entretanto há diferenças importantes: O singleto deixa de ser mais não-local para menores valores de λ ($\lambda = \tilde{\lambda}_{3322} \approx 0.788$)⁴ e a não-localidade para $\lambda = 4\pi/9$ é cerca do dobro quando comparada à da caixa PR original (ver parte superior da figura 5) (COSTA; PARISIO, 2016).

⁴ Em comparação com os resultados da seção anterior.

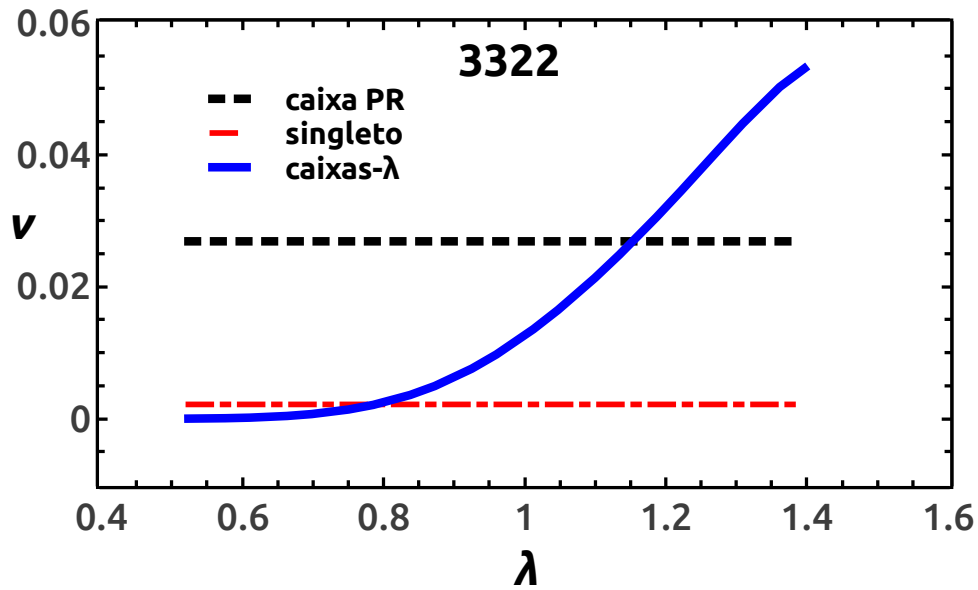


Figura 5 – Não-localidade, dada pela razão $\nu = V/V_T$, do estado singlete (linha ponto-traço), Caixa PR (linha traço), e caixas- λ (curva contínua) para a desigualdade 3322. As caixas- λ são menos não-locais que o singlete se $\lambda < \tilde{\lambda}_{CHSH} = 0.788$ e mais não-locais que a caixa PR se $\lambda > 1.154$.

O fato de $\tilde{\lambda}_{CHSH} \neq \tilde{\lambda}_{3322}$ ilustra a dificuldade envolvida ao fazer qualquer julgamento sobre a não-localidade deste sistema, sem mencionar o contexto. Para $\tilde{\lambda}_{3322} < \lambda < \tilde{\lambda}_{CHSH}$ temos o estado singlete sendo mais não-local que as caixas- λ com respeito à desigualdade CHSH, e, simultaneamente, menos não-local que as *mesmas* caixas- λ para a desigualdade 3322. Apesar da desigualdade CHSH ser mais antiga e mais conhecida, não podemos afirmar que a mesma é mais importante que a desigualdade 3322, pois ambas são “tight”⁵, ou seja, estritas e inequivalentes.

⁵ Entende-se por desigualdade “tight” a desigualdade de Bell que é limitada por alguma faceta do politopo local (BRUNNER et al., 2014).

4.5 Não-localidade de uma família de caixas sub quânticas

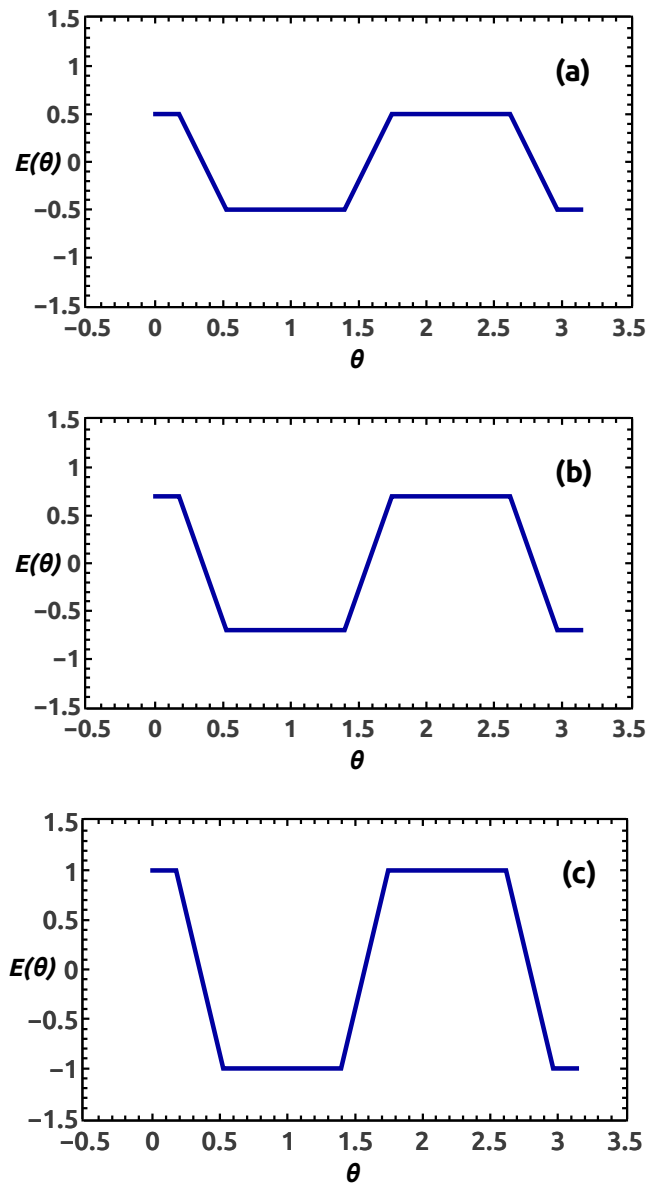


Figura 6 – Funções de correlação sub quânticas $E_a(\theta)$ para (a) $a = 0.5$, (b) $a = 0.7$, e (c) $a = 1$.

Vamos agora olhar para outra direção. Propomos uma família de caixas de correlação (caixas- a) que não produz máxima violação algébrica da desigualdade CHSH (COSTA; PARISIO, 2016). A pergunta é o seguinte: será as caixas- a , produzindo violações numérica abaixo do limite quântico, tem o volume de violação sempre menor que o do singlete? O parâmetro a é um fator

de escala comum para as correlações (ver figura 6):

$$E_a(\theta) = a \times \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \theta < \pi/18 \\ \left(-\frac{18}{\pi}\theta + 2\right) & \text{para } \pi/18 \leq \theta < \pi/6 \\ -1 & \text{para } \pi/6 \leq \theta < 4\pi/9 \\ \left(\frac{18}{\pi}\theta - 9\right) & \text{para } 4\pi/9 \leq \theta < 5\pi/9 \\ 1 & \text{para } 5\pi/9 \leq \theta < 5\pi/6 \\ \left(-\frac{18}{\pi}\theta + 16\right) & \text{para } 5\pi/6 \leq \theta < 17\pi/18 \\ -1 & \text{para } 17\pi/18 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Mais importante, para $a < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$, o limite quântico da desigualdade CHSH ($2\sqrt{2}$) não é atingido. E também, para $a < 5/8 = 0.625$, a limite quântico de 5 para desigualdade 3322 não é alcançado. Mas tanto para a desigualdade CHSH quanto a desigualdade 3322, o valor $a = 1/2$ indica que não há violação do realismo local para ambas as desigualdades. Então, estes valores de a levariam a crer que o singlete quântico é mais não-local que as caixas- a . Os resultados obtidos acima mostram que, mesmo não ultrapassando o limite quântico, as caixas- a são mais não-locais do que singlete, para certos valores de a .

Para a desigualdade CHSH, a figura 7 mostra o volume de violação das caixas- a com $a \in]1/2, 1/\sqrt{2}]$, onde vale $I_{CHSH}(a) \leq 2\sqrt{2}$. Entretanto como podemos ver na figura, para $0.618 < a < 1/\sqrt{2}$ o volume de violação das caixas- a é maior do que o do singlete quântico. Isto mostra que, de acordo com o volume de violação, o sistema em foco pode nunca atingir o limite quântico máximo mas ainda ser mais não-local que o singlete (COSTA; PARISIO, 2016).

A mesma conclusão pode ser tirada para a desigualdade 3322. A figura 8 mostra o volume de violação do singlete e das caixas- a , com $a \in]1/2, 5/8]$. Para $0.606 < a < 5/8$ as caixas- a são mais não-locais que o singlete, onde $I_{3322}(a) \leq 5$ (COSTA; PARISIO, 2016).

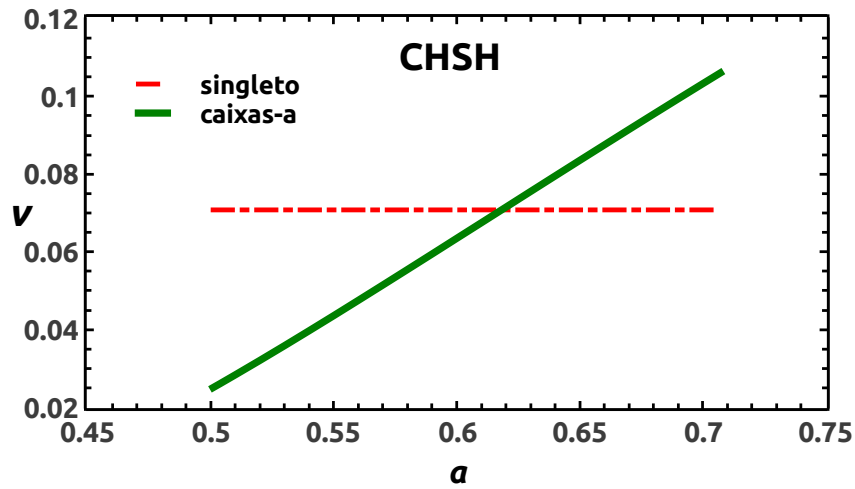


Figura 7 – Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do singlete quântico (linha ponto-traço) e caixas- a (linha contínua) para a desigualdade CHSH. Todos os valores de a produzem violação máxima restrita a $2 < I_{CHSH} \leq 2\sqrt{2}$.

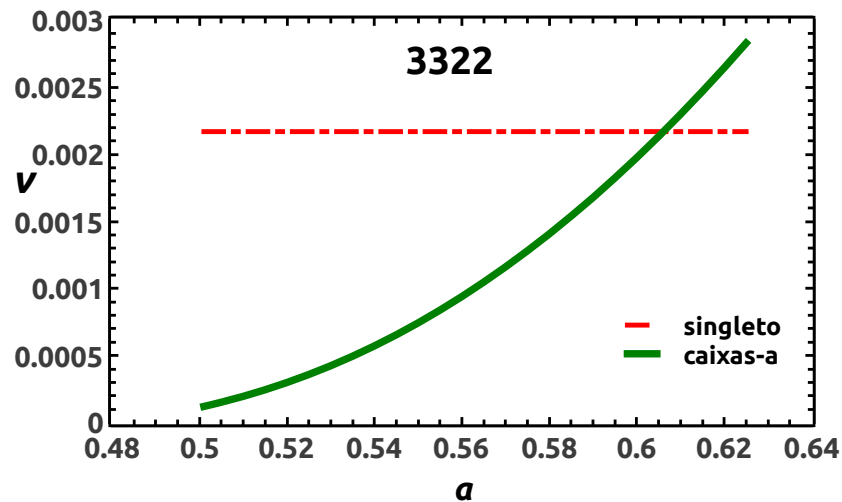


Figura 8 – Não-localidade, dada pela razão $v = V/V_T$, do singlete quântico (linha ponto-traço) e caixas- a (linha contínua) para a desigualdade 3322. Todos os valores de a produzem violação máxima restrita a $4 < I_{3322} \leq 5$.

5 Conclusões e perspectivas

Neste trabalho de mestrado, empregamos uma proposta para quantificar não-localidade denominada volume de violação para o estado singleto, a caixa PR e as caixas de correlação em contextos experimentais específicos, isto é, para as desigualdades CHSH e 3322. Inicialmente, encontramos que, para as duas desigualdades tratadas, o volume de violação da caixa PR é maior do que o do singleto, ou seja, de fato, a caixa PR é mais não-local do que o singleto. Como a caixa PR possui uma das possíveis funções de correlação que satisfazem não-sinalização e produzem máxima violação algébrica, não podemos concluir que isso é sempre verdade para todas possíveis funções de correlação.

Em seguida, propomos duas classes de funções de correlação que satisfazem as propriedades da caixa PR original, a saber, simetria esférica, não-sinalização e violação algébrica máxima. O resultado para as caixas- λ (veja a definição na seção 4.4) mostra que, mesmo alcançando o limite algébrico das desigualdades CHSH e 3322, o volume de violação para certos valores de λ é menor do que o volume de violação do singleto. Para as caixas- a (veja a definição na seção 4.5) mostramos que, mesmo não se atingindo o limite quântico, porém ainda ultrapassando o limite local, elas podem apresentar-se mais não-locais do que o singleto, de acordo com o critério volume de violação.

Estas constatações indicam que o valor algébrico não parece ser um bom quantificador para a não-localidade.

Uma possível generalização para o volume de violação seria calcular o volume diretamente no espaço de probabilidades (onde se define o politopo local), ou seja, sem olhar mais para uma desigualdade de Bell específica. Além disto, em todos os casos tratados até aqui sobre o volume de violação, usam-se medidas projetivas, por exemplo, medidas de spin Stern-Gerlach. Uma outra possibilidade de extensão seria aplicar o conceito do volume de violação para medidas não-projetivas (POVMs)¹. Um outro uso importante do volume de violação é de contornar a dificuldade em usar o valor algébrico da função de Bell como quantificador de não-localidade, para comparar os resultados para diferentes desigualdades. O volume de violação proporciona

¹ Positive-Operator Valued Measurements

comparações entre a não-localidade de um estado sob diferentes desigualdades.

Com respeito a este último ponto, uma perspectiva interessante é avaliar estados mistos que violem desigualdade 3322 mas não a desigualdade CHSH. Nos chamou a atenção o fato de que o estado da seção 2.4

$$\sigma = 0.85 |\chi\rangle\langle\chi| + 0.15 |01\rangle\langle 01|,$$

onde

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|00\rangle + |11\rangle),$$

não viola a desigualdade CHSH para nenhum conjunto de parâmetros. O mesmo estado porém viola a desigualdade 3322.

Isto nos levou a calcular o volume de violação da família de estados parametrizado por um parâmetro $a \in [0, 1]$ na forma

$$\sigma_a = a |\chi\rangle\langle\chi| + (1 - a) |01\rangle\langle 01|, \quad (5.1)$$

para a desigualdade CHSH e 3322. Para este estado, a função de correlação é dada por:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2a - 1) \cos(\theta_a) \cos(\theta_b) + \frac{4a}{5} \sin(\theta_a) \sin(\theta_b) \cos(\phi_a + \phi_b). \quad (5.2)$$

Os resultados preliminares presentes na figura 9 mostram o volume de violação para a desigualdade CHSH (linha vermelha pontilhada) e 3322 (linha azul tracejada). É importante falar sobre um detalhe deste cálculo. Durante todo o trabalho, apenas comparamos os resultados para uma mesma desigualdade de Bell. No caso de comparar resultados para diferentes desigualdades, precisamos levar em conta todas as possíveis permutações dos observáveis. Por exemplo, na desigualdade CHSH (2.13) podemos permutar os rótulos de medição 4 vezes. Para a desigualdade 3322 (2.16) existem 81 possibilidades. Note que as permutações são equivalentes. Assim, calculamos o volume de violação do estado (5.1) seguindo os mesmos procedimentos presentes na dissertação. Entretanto, temos que multiplicar os resultados por 4 para a desigualdade CHSH e por 81 para a desigualdade 3322.

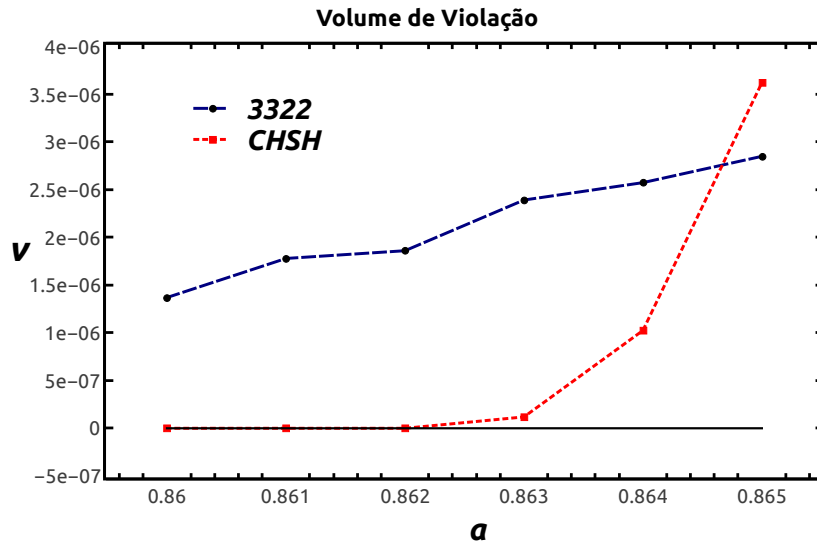


Figura 9 – Não-localidade, dada pela razão $\nu = V/V_T$, do estado σ com respeito a desigualdade CHSH (linha pontilhada) e da desigualdade 3322 (linha tracejada).

Para $a < 0.862$ o estado (5.1) é “CHSH-local”, sendo, ao mesmo tempo não-local com respeito à desigualdade 3322 para os valores de a no intervalo mostrado.

Pretendemos aprofundar esta investigação para uma melhor compreensão da não-localidade em alguns novos cenários.

Referências

- ACÍN, A. et al. Quantum nonlocality in two three-level systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 65, p. 052325, May 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.052325>>.
- ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 49, n. 25, p. 1804–1807, Dec 1982. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>>.
- ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 460–463, Aug 1981. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.460>>.
- BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, v. 1, n. 3, p. 195–200, 1964. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/111654>>.
- BELL, J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 38, p. 447–452, Jul 1966. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.38.447>>.
- BELL, J. S. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.
- BOHM, D.; AHARONOV, Y. Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky. *Physical Review*, APS, v. 108, n. 4, p. 1070, 1957.
- BRUNNER, N. et al. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 86, p. 419–478, Apr 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419>>.
- BUHRMAN, H. et al. Nonlocality and communication complexity. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 665–698, Mar 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.665>>.
- CHU, W.-J. et al. Optical simulation of a popescu-rohrlich box. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 6, 2016.
- CIREL'SON, B. S. Quantum generalizations of bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, v. 4, n. 2, p. 93–100, 1980. ISSN 1573-0530. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00417500>>.
- CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, Oct 1969. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.
- COLLINS, D.; Gisin, N. A relevant two qubit bell inequality inequivalent to the chsh inequality. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 37, n. 5, p. 1775, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/37/i=5/a=021>>.

- COLLINS, D. et al. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 040404, Jan 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.040404>>.
- COSTA, A.; PARISIO, F. Reassessment of the nonlocality of correlation boxes. *Annals of Physics*, p. –, 2016. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491616302937>>.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.
- FONSECA, E. A.; PARISIO, F. Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 92, p. 030101(R), Sep 2015. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.030101>>.
- FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 28, p. 938–941, Apr 1972. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.938>>.
- GISIN, N. Bell's inequality holds for all non-product states. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 154, n. 5-6, p. 201–202, 1991.
- GIUSTINA, M. et al. Significant-loophole-free test of bell's theorem with entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 250401, Dec 2015. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.250401>>.
- HENSEN, B. et al. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 526, n. 7575, p. 682–686, 2015.
- HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 865–942, Jun 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>>.
- LIANG, Y.-C. et al. Nonclassical correlations from randomly chosen local measurements. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 050401, Feb 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.050401>>.
- MASANES, L.; ACIN, A.; GISIN, N. General properties of nonsignaling theories. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 73, p. 012112, Jan 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.012112>>.
- MAUDLIN, T. What bell did. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 47, n. 42, p. 424010, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/47/i=42/a=424010>>.
- MÉTHOT, A. A.; SCARANI, V. An anomaly of non-locality. *Quantum Info. Comput.*, Rinton Press, Incorporated, Paramus, NJ, v. 7, n. 1, p. 157–170, jan 2007. ISSN 1533-7146. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2011706.2011716>>.
- PARISIO, F. Analytic quantification of the singlet nonlocality for the first bell inequality. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 93, p. 032103, Mar 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.032103>>.

- PARRA, E. A. F. *A Proposal to quantify quantum non-locality*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — DF,UFPE, Agosto 2014.
- PIRONIO, S. Violations of bell inequalities as lower bounds on the communication cost of nonlocal correlations. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 68, p. 062102, Dec 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.062102>>.
- POPESCU, S. Nonlocality beyond quantum mechanics. *Nature Physics*, v. 10, p. 264–270, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys2916>>.
- POPESCU, S.; ROHRLICH, D. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, v. 24, n. 3, p. 379–385, 1994. ISSN 1572-9516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02058098>>.
- QUINTINO, M. T. C. *Não-localidade como recurso para comunicação*. Dissertação (Monografia) — UFMG, Setembro 2010.
- ROWE, M. A. et al. Experimental violation of a bell's inequality with efficient detection. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 409, n. 6822, p. 791–794, 2001.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2011.
- SCARANI, V. Feats, features and failures of the pr box. *AIP Conference Proceedings*, v. 844, n. 1, p. 309–320, 2006. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.2219371>>.
- SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIV PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1935. v. 31, n. 04, p. 555–563.
- SHALM, L. K. et al. Strong loophole-free test of local realism*. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 250402, Dec 2015. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.250402>>.
- SIMNACHER, T. Y. *Non-local Boxes : Theory and Implication in Minecraft*. Dissertação (Bachelor Thesis) — RWTH Aachen University, April 2016.
- ŚLIWA, C. Symmetries of the bell correlation inequalities. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 317, n. 3, p. 165–168, 2003.
- VICENTE, J. I. de. On nonlocality as a resource theory and nonlocality measures. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 47, n. 42, p. 424017, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/47/i=42/a=424017>>.
- WALLMAN, J. J.; LIANG, Y.-C.; BARTLETT, S. D. Generating nonclassical correlations without fully aligning measurements. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 022110, Feb 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.022110>>.
- WEIHS, G. et al. Violation of bell's inequality under strict einstein locality conditions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 81, p. 5039–5043, Dec 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5039>>.

APÊNDICE A – Simetria Esférica do estado singleto

Considere o operador de rotação de spin- $\frac{1}{2}$ dado por:

$$D(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}, \alpha) = e^{-i(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) \frac{\alpha}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \cdot n_z \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -i \cdot (n_x - i \cdot n_y) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -i \cdot (n_x + i \cdot n_y) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot n_z \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde \mathbf{n} é um vetor arbitrário e $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli. Usando o formalismo de Pauli, podemos escrever:

$$|+\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Vamos considerar que o vetor unitário $\mathbf{n} = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ e obter os 2 autoestados de $e^{-i(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) \frac{\alpha}{2}}$ a partir de $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$, obtendo assim:

$$|+\rangle_{\mathbf{n}} = D(\sigma_z, \phi) D(\sigma_y, \theta) |+\rangle_z \quad (\text{A.3})$$

$$|-\rangle_{\mathbf{n}} = D(\sigma_z, \phi) D(\sigma_y, \theta) |-\rangle_z \quad (\text{A.4})$$

onde

$$D(\sigma_z, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \quad D(\sigma_y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos finalmente:

$$|+\rangle_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle_z + e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |-\rangle_z, \quad (\text{A.5})$$

$$|-\rangle_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle_z + e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |-\rangle_z. \quad (\text{A.6})$$

Logo, após um pouco de álgebra, temos:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_{\mathbf{n}} |-\rangle_{\mathbf{n}} - |-\rangle_{\mathbf{n}} |+\rangle_{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z |-\rangle_z - |-\rangle_z |+\rangle_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad (\text{A.7})$$

onde podemos omitir os índices do estado que indicam a base, uma vez que ele apresenta a mesma forma em qualquer base.

APÊNDICE B – Código para calcular o volume de violação

Neste apêndice, vamos mostrar um exemplo de como calcular numericamente o volume de violação para o estado parametrizado de 2 partículas emaranhadas de spin- $\frac{1}{2}$

$$|\Psi\rangle = a|01\rangle + \sqrt{1-a^2}e^{i\psi}|10\rangle \quad (\text{B.1})$$

onde $a \in [0, 1]$ e $\psi \in [0, 2\pi]$.

Fazendo $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\psi = \pi$, recuperamos o estado singleto.

Aqui utilizamos a linguagem Fortran. O código a seguir deverá ser salvo como “bell.f” ou qualquer outro nome que preferir (“outronome.f”). Apenas copie e cole em um arquivo e salve em uma pasta em separado.

```
Program Volume_of_Violation
```

```
c*****
c Calculo do volume de violação da primeira desigualdade
c para o estado singleto parametrizado
c   |estado> = a|01> + \sqrt{1-a^2}exp{i*t0}|10>
c   onde a =[0,1] e t0= [0,pi]
c*****
Implicit Double Precision (a-h,o-z)
Implicit Integer(8) (i-n)
Character*12 zw1,zw2
Character(len=20) :: arg1

call srand(mod(TIME()*39847-873,145378317))
c*****
c*****
```



```

call get_command_argument(1, arg1)
read(arg1, *)ms

pi=3.1415926535
l=10
n=10**l  !número total de pontos!
rn=real(n)
c=====
c      entrada dos parâmetros (singleto -> a=1.0/sqrt(2.0) and t0=pi)
a=1.0/sqrt(2.0)
t0=pi
c=====
      Bmax=0.0    !inicialização para o valor da função de Bell!
coooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
c      Cenário de Intregação - Método de Monte Carlo:
coooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

c numeração para criar um nome da pasta
ma=86.0 !o número é de acordo!
c*****
c arquivo geral (nome)!criação da arquivo com os dados!
c*****
Nw1=l*100+ma!exemplo: l=8 e ma=13 fica 813.dat!!nome da arquivo!
write(zw1,11)Nw1
open(20,file=zw1)
Close(20)
c*****
c=====
c Início do cálculo da Integral do Volume de violação
c=====

Do i=1,n
c=====

```

```

c geração aleatória das configurações
c (ângulos polares (ta,tb,tc) e azimutais (fa,fb,fc))
c=====
fa=0.0
fb=2.0*pi*rand()
fc=2.0*pi*rand()
ta=0.0
tb=2.0*asin(sqrt(rand()))
tc=2.0*asin(sqrt(rand()))
c=====

c-----
c Integral Função de Bell (C)
c-----

dd1=E(ta,tb,fa,fb,a,t0)!E(a,b)!
dd2=E(ta,tc,fa,fc,a,t0)!E(a,d)!
dd3=E(tb,tc,fb,fc,a,t0)!E(c,b)!

C=abs(dd1-dd2)-dd3!função de Bell!

if (C>1.0) then
  ds=ds+1.0
endif

c-----
c Máximo função de Bell
c-----

if (C > Bmax) then
Bmax=C
end if

enddo

c=====

```

```

c      volume de violação
c=====
Vr=ds/rn

c-----
c=====
c      alocação dos resultados no arquivo criado
c=====
open(21,file=zw1,position='append')    !Salva os resultados!
write(21,10)Vr,Bmax,a
close(21)

c*****
10 Format(10(4X,D20.14))
11 Format(i0,'.dat')

End

Function E(t1,t2,f1,f2,a,t0)!função de correlação!
double precision E,t1,t2,f1,f2,a,t0
b=2.0*a*sqrt(1.0-a**2.0)

E=b*sin(t1)*sin(t2)*cos(f1-f2-t0)-cos(t1)*cos(t2)!função de correlação!

return
end
cooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

```

Em seguida, o código abaixo deverá ser salvo também como “bell.py” ou qualquer outro nome que preferir (“outronome.py”). O arquivo tem que está na mesma pasta onde o código do Fortran foi salvo. No caso do código abaixo, ele faz o programa do Fortran ser calculado quantas vezes preferir, por exemplo, 10 vezes onde diz $[[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]$.

```
#!/usr/bin/python3

from subprocess import Popen, PIPE
from itertools import product
from time import sleep, time

max_parallel_processes = 1

ti = time()

def float_range(beg, step, end):
    res = []
    size = int((end - beg)/step)+1
    for i in range(size):
        if beg + i*step <= end:
            res.append(beg + i*step)
    return res

def check_processes(processes):
    for process in processes:
        if process[0].poll() is not None:
            print(process[2], " ", time()-process[1], " s.",
                  sep=' ', end='\n')
            for line in process[0].stdout.readlines():
                print(line.decode(), end='')
            print("\n")

            processes.remove(process)
    sleep(1)

def parallel_loop(instruction, parameters_array, title=None):
    if title is not None:
        print(title.format(*parameters_array))
```

```
parameters = product(*parameters_array)

processes = []
for param in parameters:
    while True:
        if len(processes) < max_parallel_processes:
            processes.append( [Popen(instruction.format(*param),
                                   shell=True, stdout=PIPE),
                               time(), param] )
            break
        else:
            check_processes(processes)

while True:
    if len(processes) == 0:
        break
    else:
        check_processes(processes)

parameters = [
    [[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]
    #[[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]
    #[[0,0,0,0]]
    #[[0,0,0,0,0]]
    #[[0,0]]
    #[[0,0,0]]
    #[[0]]
]

instruction = "./bell {0}"

for parameter in parameters:
```

```
parallel_loop(instruction, parameter)

print("\nExecution time:", time() - ti, "s.")
```

Feito esta primeira parte, agora vamos a execução. Abra o código do Fortran em algum editor de texto, por exemplo, o “Kile” no sistema operacional Ubuntu, caso queira modificar os parâmetros do estado ou número de pontos. Abra um terminal de comando e entre na pasta através dele. Assim, basta escrever alguns comandos para gerar os resultados. Primeiro, execute o seguinte comando no terminal:

```
f95 -o bell bell.f
```

Por fim, execute o comando:

```
/bell.py
```