Universidade Federal de Pernambuco
1º Exercício Escolar de Cálculo 3 - Turmas T1 e T6
13 de Abril de 2016
Aluno: **Turma:**

GABARITO

$1^{\underline{a}}$) **(3,0)** Um arame fino tem a forma da hélice circular $x = 3t$, $y = 4\cos t$, $z = 4\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$. Se a densidade da massa for dada pela função $\rho(x, y, z) = y^2 + z^2$, calcule a massa total e o centro de massa do arame.

Solução: A massa total é dada por $M = \int_C \rho\,\mathrm{d}s$.

Como $\overrightarrow{r}(t) = (3t, 4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t) \Rightarrow \overrightarrow{r}'(t) = (3, -4\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = 5$, calculamos a massa total:

$$M = \int_C \rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \rho(3t, 4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)\cdot 5\,\mathrm{d}t = 5\int_0^{2\pi} (16\cos^2 t + 16\,\mathrm{sen}^2\,t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 5\int_0^{2\pi} 16\,\mathrm{d}t = 5\cdot 16\cdot 2\pi = 160\pi$$

O centro de massa é dado por $\left(\frac{\int_C x\rho\,\mathrm{d}s}{M}, \frac{\int_C y\rho\,\mathrm{d}s}{M}, \frac{\int_C z\rho\,\mathrm{d}s}{M}\right)$. Calculando as integrais:

$\int_C x\rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 3t\rho(3t, 4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)\cdot 5\,\mathrm{d}t = 16\cdot 5\int_0^{2\pi} 3t\,\mathrm{d}t = 80\frac{3t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 40\cdot 3\cdot 4\pi^2 = 480\pi^2$,

portanto $\frac{\int_C x\rho\,\mathrm{d}s}{M} = \frac{160\cdot 3\pi^2}{160\pi} = 3\pi$.

$\int_C y\rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 4\cos t\rho(3t, 4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)\cdot 5\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 64\cos t\,\mathrm{d}t = 0$

$\int_C z\rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{sen}\,t\rho(3t, 4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)\cdot 5\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 64\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t = 0$

Resposta: A massa total é 160π e o centro de massa é o ponto $(3\pi, 0, 0)$.

Obs: A massa é homogênea sobre o fio, assim o valor de ρ é o mesmo para todos os pontos da hélice: $\rho(3t, 4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t) = (4\cos t)^2 + (4\,\mathrm{sen}\,t)^2 = 16$. O centro de massa está posicionado sobre o eixo Ox, que corresponde exatamente ao eixo da hélice.

$2^{\underline{a}}$) **(3,0)** Considere C a curva obtida pela interseção do plano $S_1 : x = z$ com a superfície cilíndrica $S_2 : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$.

a) (0,8) Exiba uma parametrização de C.

b) (0,8) Determine o comprimento de C.

c) (0,6) Parametrize C pelo comprimento de arco.

d) (0,8) Calcule o módulo da integral de linha $\displaystyle\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}z$.

Solução:

a) A partir de $S_2 : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, tomamos $x = \cos t$ e $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t$, com $0 \le t \le 2\pi$. De $x = z$, segue que $z = \cos t$.

Resposta: $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

b) $\overrightarrow{r}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{2}\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{(-\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2 + (-\,\mathrm{sen}\,t)^2)} = \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\,t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}$

Portanto o comprimento é $L(C) = \int_0^{2\pi} ||\overrightarrow{r}'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi$

Resposta: $2\sqrt{2}\pi$

c) Como $||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{2}$, então a função comprimento de arco é:

$s(t) = \int_0^t ||\overrightarrow{r}'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}t$

Invertendo: $s = \sqrt{2}t \Rightarrow t = \frac{s\sqrt{2}}{2} = t(s)$.

A solução é: $\overrightarrow{r_1}(s) = \overrightarrow{r}(\frac{s\sqrt{2}}{2}) = (\cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\frac{s\sqrt{2}}{2}), \cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}))$, $0 \le s \le 2\sqrt{2}\pi$

Resposta: $\overrightarrow{r_1}(s) = (\cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\frac{s\sqrt{2}}{2}), \cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}))$, $0 \le s \le 2\sqrt{2}\pi$

d) Pela parametrização do item a), temos $x = \cos t$, $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t$ e $z = \cos t$. Para essa parametrização temos $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \sqrt{2}\cos\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}z = -\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t$. Portanto:

$$\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}z =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t)(-\,\mathrm{sen}\,t) + (\cos t)(\sqrt{2}\cos t) + (\cos^2 t + 2\,\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t)(-\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2\,t + \sqrt{2}\cos^2 t - 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t =$$

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi - 2\cos|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$$

Resposta: $2\sqrt{2}\pi$

3ª **(4,0)** Em cada item, calcule a integral de linha para a curva plana C dada.

a) (2,0) C é a curva parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \left(\cos(2t^2 - 2t), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^3}{4}\right)\right)$, $0 \le t \le 1$. Calcule

$$\int_C (2xy - y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - x - 2y)\,\mathrm{d}y$$

b) (2,0) C é o círculo de raio 4 centrado na origem. Calcule

$$\oint_C (y^3 + x^5)\,\mathrm{d}x + (10 - y - x^3)\,\mathrm{d}y$$

Solução:

a) Calculamos essa integral usando Teorema Fundamental do Cálculo para campos gradientes, uma vez que o campo em questão é conservatico.

Verificação de que o campo $\overrightarrow{F}(x, y) = (2xy - y, x^2 - x - 2y)$ é conservativo: tomando $P(x, y) = 2xy - y$ e $Q(x, y) = x^2 - x - 2y$, temos $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e o domínio de P e Q é todo o plano $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo.

Uma função potencial ϕ satisfaz $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy - y$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - x - 2y$, integrado a primeira e comparando com a segunda, temos:

$\phi(x, y) = x^2 y - yx + g(y) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - x + g'(y)$

$x^2 - x + g'(y) = x^2 - x - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + K \Rightarrow \phi(x, y) = x^2 y - yx - y^2 + K$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$\displaystyle\int_C (2xy - y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - x - 2y)\,\mathrm{d}y = \phi(\overrightarrow{r}(1)) - \phi(\overrightarrow{r}(0)) = \phi(1, \frac{\sqrt{2}}{2}) - \phi(1, 0) = (1^2\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + K) - K = -\frac{1}{2}$

Resposta: $-\frac{1}{2}$

b) Utilizando o Teorema de Green para $P = y^3 + x^5$ e $Q = 10 - y - x^3$:

$$\oint_C (y^3 + x^5)\,\mathrm{d}x + (10 - y - x^3)\,\mathrm{d}y = \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \int\int_D -3x^2 - 3y^2$$

Aonde D é o interior do círculo de raio 4 em torno da origem. Calculamos a última integral usando coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \le r \le 4$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

$$\int\int_D -3x^2 - 3y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -3\int_0^4\int_0^{2\pi} [(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2]r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$
$$= -3\int_0^4\int_0^{2\pi} r^3\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = -6\pi\int_0^4 r^3 = -6\pi\frac{r^4}{4}\Big|_0^4 = -6\pi\frac{4^4}{4} = -384\pi$$

Resposta: -384