Universidade Federal de Pernambuco
1º Exercício Escolar de Cálculo 3
06 de Setembro de 2016
Aluno: **Turma:**

GABARITO

$1^{\underline{a}}$) **(3,0)** Considere a curva plana C dada em coordenadas polares pela relação $r = \theta$, $0 \leq \theta \leq 3$.

a) (1,0) Exiba uma parametrização de C.

b) (2,0) Calcule a integral de linha $\int_C \rho \, \mathrm{d}s$ da função $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Solução:

a) Como a curva C é dada em coordenadas polares pela relação $r = \theta$, suas coordenadas polares são (θ, θ) para $\theta \in [0, 3]$. Portanto, as coordenadas cartesianas serão $x = \theta \cos \theta$ e $y = \theta \cos \theta$. Daí, obtemos uma parametrização para a curva C, dada por $\overrightarrow{r}(t) = (t \cos t, t \,\mathrm{sen}\, t)$ com $t \in [0, 3]$.

Resposta: $\overrightarrow{r}(t) = (t \cos t, t \,\mathrm{sen}\, t)$ com $t \in [0, 3]$.

b) Para a parametrização acima, o vetor tangente à curva é dado por:

$$\overrightarrow{r}'(t) = (\cos t - t \sin t, \mathrm{sen}\, t + t \cos t)$$

e sua norma

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\mathrm{sen}\, t + t \cos t)^2} = \sqrt{t^2 + 1}.$$

Com isso, podemos calcular a integral solicitada:

$$\begin{aligned}
\int_C \rho \, \mathrm{d}s &= \int_0^3 \rho(\overrightarrow{r}(t)) \|\overrightarrow{r}'(t)\| \, dt \\
&= \int_0^3 (t^2 + 1) \, dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^3 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Resposta: 12.

2ª) **(3,0)** O segmento de reta de extremidades $A = \left(\sqrt{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B = \left(-\sqrt{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ divide a região do plano delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ em duas partes. Calcule a área da parte situada acima do segmento AB.

Solução: Com o auxílio do Teorema de Green, vemos que a área é dada pela integral de linha $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, onde C é a união de duas curvas C_1 e C_2 com C_1 sendo o arco de elipse ligando o ponto A ao ponto B e C_2 é a reta ligando o ponto B ao ponto A.

Então, primeiramente vamos parametrizar essas duas curvas C_1 e C_2. Facilmente podemos ver que uma parametrização para C_1 é $\overrightarrow{r}_1(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$ com $t \in [\pi/4, 3\pi/4]$. Já o segmento C_2 pode ser parametrizado por $\overrightarrow{r}_2(t) = (-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}t, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ com $t \in [0, 1]$.

Com essas parametrizações, podemos calcular os respectivos vetores tangente:

$$\overrightarrow{r}'_1(t) = (-2\sin t, 3\cos t) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{r}'_2(t) = \left(2\sqrt{2}, 0\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_{C_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{C_2} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} 6\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 6\,dt \\
&= \tfrac{3\pi}{2} - 3.
\end{aligned}$$

Resposta: $\frac{3\pi}{2} - 3$.

$3^{\underline{a}}$ **(4,0)** Considere os campos vetoriais $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2 : \mathbb{R}^2 - (0,0) \to \mathbb{R}^2$ dados por

$$\overrightarrow{F}_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\overrightarrow{j} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{F}_2(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$$

a) (1,0) O campo $\overrightarrow{F}_1$ é conservativo? Em caso afirmativo, determine um potencial.

b) (1,0) O campo $\overrightarrow{F}_2$ é conservativo? Em caso afirmativo, determine um potencial.

c) (1,0) Calcule $\int_C \overrightarrow{F}_1 \cdot \mathrm{d}r$, onde C é o segmento de reta ligando os pontos $(1,-1)$ a $(1,3)$ orientado para cima.

d) (1,0) Calcule $\oint_C \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}r$, onde C é a circunferência $x^2+y^2 = 9$ orientada no sentido anti-horário.

Solução:

a) Para mostrar que um campo é conservativo, buscamos ϕ tal que $\nabla\phi = \overrightarrow{F}_1$, ou seja,

$$\tfrac{\partial \phi}{\partial x} = \tfrac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \tfrac{\partial \phi}{\partial y} = \tfrac{2y}{x^2+y^2}.$$

Integrando $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$ com respeito a x, obtemos

$$\phi(x,y) = \log(x^2+y^2) + \psi(y).$$

Derivando ϕ com respeito a y e comparando com $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$, obtemos que ψ é constante. Daí, uma escolha para ϕ é $\phi(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

Resposta: Sim, $\phi(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

b) Considerando a circunferência $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, notemos que a integral

$$\oint_C \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}_2(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi.$$

Se o campo $\overrightarrow{F}_2$ fosse conservativo, a integral de linha acima sobre a curva fechada C teria que ser igual a zero.

Resposta: Não.

c) Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos

$$\oint_C \overrightarrow{F}_1 \cdot \mathrm{d}r = \phi(1,3) - \phi(1,-1) = \log 5$$

Resposta: $\log 5$

d) Parametrizamos C por $\overrightarrow{r}(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Assim temos

$$\oint_C \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}_2(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{9}(-3\operatorname{sen} t, 3\cos t) \cdot (-3\sin t, 3\cos t) dt = 2\pi.$$

Resposta: 2π