Universidade Federal de Pernambuco
2º Exercício Escolar de Cálculo 3
17 de Outubro de 2016
Aluno: **Turma:**

GABARITO

1ª) **(4,0)** Considere S a superfície parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u),$$

com $1 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

a) (1,5) Determine o vetor normal unitário de S no ponto $P_0 = (1, \sqrt{3}, 2)$ de S que aponta para cima.

b) (2,5) Calcule a área de S.

Solução:

a) $\vec{r}_u = (\cos v, \text{sen}\,v, 1)$, $\vec{r}_v = (-u\,\text{sen}\,v, u\cos v, 0) \therefore \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-u\cos v, -u\,\text{sen}\,v, u)$. Se $\vec{r}(u,v) = (1, \sqrt{3}, 2)$, então $u = 2$ e $v = \pi/3$, consequentemente, a normal no ponto em questão é $\vec{N} = (-2\cos(\frac{\pi}{3}), -2\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}), 2) = (-1, -\sqrt{3}, 2)$, e portanto, o vetor normal unitário no ponto pedido é

Resposta: $\vec{n} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) A área é dada pela integral

$$A(S) = \iint_D ||\vec{N}||dS,$$

onde D é a região dos parâmetros e $||\vec{N}|| = ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| = ||(-u\cos v, -u\,\text{sen}\,v, u)||$, ou seja, $||\vec{N}|| = \sqrt{(-u\cos v)^2 + (-u\,\text{sen}\,v)^2 + u^2} = u\sqrt{2}$, portanto,

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_1^3 u\sqrt{2}dudv = 8\pi\sqrt{2}$$

Resposta: $A(S) = 8\pi\sqrt{2}$

$2^{\underline{a}}$) **(4,0)** Dados o campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xz\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} - (z^2 + z + e^{x^2}\operatorname{sen} y)\overrightarrow{k}$ e a superfície fechada S que delimita o cilindro $E: x^2 + z^2 \leq 9,\ 0 \leq y \leq 3$, com a normal apontando para fora. Calcule:

a) (1,5) O fluxo de $\overrightarrow{F}$ através da base de E que está contida no plano $y = 0$.

b) (2,5) O fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de S.

Solução:

a) A base S_1 de E é parametrizada por por

$$r(x,z) = (x,0,z),\ x^2 + z^2 \leq 9,$$

com normal $r_x \times r_z = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0)$(apontando para fora). Assim, o fluxo pedido é dado por:

$$\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \overrightarrow{F}(x,0,z)\cdot(0,-1,0)dA = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} (xz,0,-z^2-z)\cdot(0,-1,0)dA = 0.$$

Resposta: 0

b) Na situação que se apresenta podemos aplicar o Teorema de Gauss. Então,

$$\iint\limits_{S} \overrightarrow{F}\cdot dS = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}\overrightarrow{F} dV = \iiint\limits_{E} \left[\frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2 - z - e^{x^2}\operatorname{sen} y))\right] dV.$$

Finalmente,

$$\iint\limits_{S} \overrightarrow{F}\cdot dS = \iiint\limits_{E} -dV = -\text{volume}(E) = -27\pi.$$

Resposta: -27π

3ª) **(2,0)** Calcule o fluxo do rotacional do campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ através da superfície $S : z = e^{x^2+y^2-1} - 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, com a normal apontando para cima.

Solução 1 (Teorema de Stokes): Pelo Teorema de Stokes , podemos escrever que

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot dr,$$

onde C é a fronteira de S, a circunferência de raio 1 centrada na origem do plano xy, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti horário. A parametrização de C é $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, de maneiras que $r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$, portanto,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot dr = \int\limits_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt,$$

portanto,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \int\limits_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt = \int\limits_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi.$$

Resposta: 2π

Solução 2 (Cálculo direto):

S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, e^{r^2-1} - 1)$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Para essa parametrização temos: $\overrightarrow{r}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2re^{r^2-1} - 1)$, $\overrightarrow{r}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ e $\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta = (-r\cos\theta(2re^{r^2-1} - 1), -r\operatorname{sen}\theta(2re^{r^2-1} - 1), r)$, que aponta para cima.

Além disso, $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = (0, 0, 2)$. Portanto podemos calcular o fluxo diretamente:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (0, 0, 2) \cdot (-r\cos\theta(2re^{r^2-1} - 1), -r\operatorname{sen}\theta(2re^{r^2-1} - 1), r)drd\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 2rdrd\theta = 2\int\limits_0^{2\pi} 1d\theta \int\limits_0^1 rdr = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi\end{aligned}$$

Solução 3 (Teorema de Gauss):

Aplicando o Teorema de Gauss para o campo $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ na superfície fechada formada pela união de S com o disco S_1 de raio 1, contido no plano xy e centrado na origem, com normal apontado para baixo em S_1, obtemos que:

$$0 = \iiint \operatorname{div}(\operatorname{rot}\overrightarrow{F})dV = \iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} + \iint\limits_{S_1} \operatorname{rot}\overrightarrow{F}$$

Para calcular a segunda integral, observamos que $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = (0, 0, 2)$ e parametrizamos S_1 por $\overrightarrow{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0)$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Para essa parametrização temos:

$\overrightarrow{r}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\overrightarrow{r}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ e $\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta = (0, 0, r)$, que aponta para cima. Tomando o vetor normal oposto para calcular a integral, obtemos:

$$\iint\limits_{S_1} \operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (0,0,2)\cdot(0,0,-r)drd\theta = 2\pi$$

Portanto $\iint_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} = 0 - \iint_{S_1}\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = 0 - (-2\pi) = 2\pi$.