Universidade Federal de Pernambuco
2º Exercício Escolar de Cálculo 3
23 de Maio de 2016
Aluno: **Turma:**

$1^{\underline{a}}$) **(2,5)** Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y(z-1), x+e^{\cos z}, z)$ e S a superfície de revolução obtida rotacionando a curva $\overrightarrow{r}(t) = (\sqrt{2-t}, 0, t)$, $-4 \leq t \leq 0$, em torno do eixo Oz orientada com a normal apontando para fora.

a) (0,5) Dê uma parametrização de S.

b) (1,0) Calcule a área de S.

c) (1,0) Calcule o fluxo do rotacional de $\overrightarrow{F}$ através de S.

Solução:

a) Tomamos a coordenada z como parâmetro u e o ângulo da rotação igual a v, assim temos: $\overrightarrow{r}(u,v) = (\sqrt{2-u}\cos v, \sqrt{2-u}\,\mathrm{sen}\, v, u)$, $-4 \leq u \leq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Resposta: $\overrightarrow{r}(u,v) = (\sqrt{2-u}\cos v, \sqrt{2-u}\,\mathrm{sen}\, v, u)$, $-4 \leq u \leq 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) Para a parametrização acima, temos:

$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \big(-(2-u)^{\frac{1}{2}}\cos v, -(2-u)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}\, v, \frac{-1}{2}\big) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|| = \frac{\sqrt{9-4u}}{2}$

área de $S = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi}\int_{-4}^{0} \frac{\sqrt{9-4u}}{2} du dv = \frac{2\pi}{2}[-\frac{(9-4u)^{\frac{3}{2}}}{6}]_{-4}^{0} = \frac{49\pi}{3}$

Resposta: $\frac{49\pi}{3}$

c) **Comentário:** Resolvemos este item usando o Teorema de Stokes. Como a fronteira de S é formada por duas curvas, basta calcular a integral de linha sobre cada curva.

A fronteira de S consiste em duas circunferências C_{-4} e C_0 centradas em $(0,0,-4)$ e $(0,0,0)$, contidas nos planos $z=-4$ e $z=0$, de raios $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$. A orientação positiva de ∂S com respeito a normal apontando para fora de S corresponde ao sentido anti-horário de C_{-4} e ao sentido horário de C_0 (vistas de cima).

Teorema de Stokes: $\iint_S \mathrm{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\partial S}\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = \int_{C_{-4}}\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} + \int_{C_0}\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r}$

Parametrizamos C_{-4} e C_0, respeitando os sentidos, por: $\overrightarrow{r}_{-4}(t) = (\sqrt{6}\cos t, \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\, t, -4)$ e $\overrightarrow{r}_0(t) = (\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, 0)$.

$\int_{C_{-4}}\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi}(-15\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{6}\cos t + e^{\cos(-4)}, -4)\cdot(-\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{6}\cos t, 0) = \int_0^{2\pi} 90\,\mathrm{sen}^2 t + 6\cos^2 t + e^{\cos(-4)}\sqrt{6}\cos t = 96\pi$

$\int_{C_0}\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi}(3\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t + e, 0)\cdot(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -\sqrt{2}\cos t, 0)dt = \int_0^{2\pi} -6\,\mathrm{sen}^2 t + -2\cos^2 t + e\sqrt{2}\cos t = -8\pi$

Resposta: 88π

$2^{\underline{a}}$) **(2,5)** Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \big(3 + y + 2z - x, z^8 + \ln(x^6+1) - y, 2x - y - z\big)$$

através do pedaço S do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 1$ que está acima do plano $x + z = 1$, com S orientado para cima.

Comentário 1: O cálculo direto parece muito complicado devido ao termo $z^8 + \ln(x^6+1)$, essa dificuldade é contornada considerando uma superfície contida no plano $x + z = 1$ cuja união com S dá uma superfície fechada e, usando o Teorema de Gauss, bastará calcularmos a integral tripla do divergente sobre a região delimitada e o fluxo de $\overrightarrow{F}$ sobre a superfície contida no plano $x + z = 1$.

Comentário 2: É mais fácil calcular o fluxo de $\overrightarrow{F}$ sobre conjuntos contidos em $x + z = 1$ pois o vetor normal tem coordenada $y = 0$ e, portanto, o produto escalar vai cancelar a segunda coordenada de $\overrightarrow{F}$.

Solução: Os pontos da interseção do parabolóide $S_1 : x^2 + y^2 + z = 1$ com o plano $\pi : x + z = 1$ satisfazem $z = 1 - x = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Portanto a interseção de S_1 com π é uma elipse contida em π dada pelo gráfico da função $f(x,y) = 1 - x$ com domínio na circunferência $C : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ em Oxy. S não é fechada, mas podemos fechá-la unindo com o interior S_2 dessa elipse em π, a superfície S_2 é dada pelo gráfico da mesma função f com domínio no disco $D : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ em Oxy.

Dessa forma $S \cup S_2$ é a fronteira do sólido $E : 1 - x \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in D$, aonde a orientação positiva de $S \cup S_2$ corresponde à orientação de S_2 para baixo (contrário a que queremos) e à orientação de S para cima. Tome $\overrightarrow{n}$ a normal de S_2 para cima.

Teorema de Gauss: $\iiint_E \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = \iint_{\partial E} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} - \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS$

$$\iiint_E \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = -3 \iint_D \int_{1-x}^{1-x^2-y^2} dz dx dy = -3 \iint_D (1 - x^2 - y^2) - (1 - x) dx dy =$$
$$-3 \iint_D (x - x^2 - y^2) dx dy =$$

$\big($Fazendo a mudança de variáveis: $x = \frac{1}{2} + r\cos\theta, y = r \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $dxdy = rdrd\theta$ $\big)$

$$= -3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \Big[\frac{1}{2} + r\cos\theta - \frac{1}{4} - r\cos^2\theta - r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta\Big] r dr d\theta = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{4} -$$
$$r^3 dr\theta = -6\pi\Big[\frac{(1/2)^2}{8} - \frac{(1/2)^4}{4}\Big] = -6\pi\frac{1}{64} = \frac{-3\pi}{32}$$

Parametrizamos S_2 por $\overrightarrow{r}(u,v) = (u, v, 1-u)$, $(u,v) \in D$, assim $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (1,0,1)$.

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D (5 - 3u + v, (1-u)^8 + \log(u^6+1) - v, -1 + 3u - v) \cdot (1,0,1) du dv =$$
$$\iint_D 4 du dv = 4 \cdot \text{area}(D) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

Portanto $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_E \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \pi - \frac{3\pi}{32} = \frac{29\pi}{32}$

Resposta: $\frac{29\pi}{32}$

$3^{\underline{a}}$) **(2,5)** Considere a curva C obtida como interseção do parabolóide elíptico $z = x^2 + y^2$ com a superfície cilíndrica parabólica $z = 1 - x^2$. Calcule $\oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, com C orientada no sentido anti-horário quando vista de cima, onde

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left((2 - z)y, sen(y^3), -\frac{xy}{2}\right)$$

Comentário: A questão pede a circulação de $\overrightarrow{F}$ sobre uma curva fechada, podemos resolvê-la caracterizando essa curva como a fronteira de alguma superfície e usando o Teorema de Stokes.

Solução: Para os pontos da interseção temos $z = 1-x^2 = x^2+y^2 \Rightarrow 2x^2+y^2 = 1$, portanto C é o gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2$ com domínio sobre a elipse $E : 2x^2 + y^2 = 1$ no plano Oxy. C é a fronteira da superfície S dada pelo gráfico da mesma função f com domínio sobre o interior da elipse $D : 2x^2 + y^2 \leq 1$, e está positivamente orientada se tomarmos S orientada para cima.

Teorema de Stokes: $\oint_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$

$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = (\frac{-x}{2}, \frac{-y}{2}, z - 2)$

S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(u, v) = (u, v, 1-u^2)$, $(u, v) \in D$, sendo $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (2u, 0, 1)$.

$$\iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S (\frac{-u}{2}, \frac{-v}{2}, -u^2 - 1) \cdot (2u, 0, 1) dudv = \iint_S -1 - 2u^2 dudv =$$

$\big($Fazendo a mudança de variáveis $u = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos\theta$, $v = r \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $dudv = \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\theta$ $\big)$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-1 - r^2 \cos^2\theta) \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} [\frac{-r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \cos^2\theta]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos^2\theta}{4} d\theta = \frac{-\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{-5\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{2}\pi}{8}$$

Resposta: $\frac{-5\sqrt{2}\pi}{8}$

$4^{\underline{a}}$) **(2,5)** Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = 2x\,\overrightarrow{i} + \frac{3x\,\overrightarrow{i} + (3y-3)\,\overrightarrow{j} + (3z+6)\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{\left(x^2+(y-1)^2+(z+2)^2\right)^3}} + \frac{(x-2)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{\left((x-2)^2+y^2+z^2\right)^3}}$$

através da superfície esférica de centro $(1,1,0)$ e raio 3, orientada para fora.

Comentário 1: Não podemos usar o Teorema de Gauss diretamente para a esfera de raio 3 centrada em $(1,1,0)$ pois $\overrightarrow{F}$ não está definido nos pontos $(0,1,-2)$ e $(2,0,0)$.

Comentário 2: Quando falamos da Lei de Gauss em sala de aula, vimos que o fluxo do campo $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \frac{C(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ sobre qualquer superfície fechada delimitando a origem em seu interior é igual a $4\pi C$. O mesmo raciocínio garante que o fluxo do campo gerado por uma carga em (x_0,y_0,z_0), $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \frac{C(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^3}}$ sobre qualquer superfície fechada delimitando o ponto (x_0,y_0,z_0) em seu interior é igual a $4\pi C$.

Solução: Calculamos separadamente os fluxos dos campos campos $\overrightarrow{F}_1(x,y,z) = 2x\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F}_2(x,y,z) = \frac{3x\,\overrightarrow{i}+3(y-1)\,\overrightarrow{j}+3(z+2)\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{(x^2+(y-1)^2+(z+2)^2)^3}}$ e $\overrightarrow{F}_3(x,y,z) = \frac{(x-2)\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{((x-2)^2+y^2+z^2)^3}}$ através da superfície esférica S de centro $(1,1,0)$ e raio 3. ($\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3$)

(A) Fluxo de $\overrightarrow{F}_1$ sobre S: S é a fronteira da esfera E_1 centrada em $(1,1,0)$ de raio 3.

Teorema de Gauss (podemos usar aqui porque $\overrightarrow{F}_1$ está definido sobre todo o espaço $\mathbb{R}^3$): $\iint_S \overrightarrow{F}_1 \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_E \operatorname{div} \overrightarrow{F}_1 dV = 2\operatorname{vol}(E_1) = 2\frac{4\pi 3^3}{3} = 72\pi$

(B) Fluxo de $\overrightarrow{F}_2$ e $\overrightarrow{F}_3$ sobre S: De forma mais geral, veremos que o fluxo do campo $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \frac{C(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$ sobre qualquer superfície que delimita uma região contendo o ponto (x_0,y_0,z_0) é igual a $4\pi C$.

Calculando o fluxo de $\overrightarrow{E}$ sobre qualquer superfície esférica S_R centrada em (x_0,y_0,z_0) e raio R orientada para fora: Neste caso em cada ponto (x,y,z) de S_R o vetor normal é um múltiplo positivo de $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, como é unitário temos $\overrightarrow{n} = \frac{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{R}$. Logo $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{C||(x-x_0,y-y_0,z-z_0)||^2}{R\cdot R^3} = \frac{CR^2}{R^4} = \frac{C}{R^2}$, assim $\iint_{S_R} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \frac{C}{R^2}\operatorname{vol}(S_R) = 4\pi C$.

$\overrightarrow{E}$ tem divergente nulo: escreva $\overrightarrow{E} = \Big((x-x_0)\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\big)^{-\frac{3}{2}}, (y-y_0)\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\big)^{-\frac{3}{2}}, (z-z_0)\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big)$.

Logo: $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \big[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{5}{2}}2(x-x_0)^2\big] + \big[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{5}{2}}2(y-y_0)^2\big] + \big[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{5}{2}}2(z-z_0)^2\big] = 3((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{3}{2}} - 3((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2) = 0$

Considerando uma superfície esférica $\tilde{S}$ centrada em (x_0,y_0,z_0) que esteja no interior de S, $S \cup \tilde{S}$ delimita uma região E_2 do espaço que não contém o ponto (x_0,y_0,z_0), cuja orientação positiva de ∂E_2 corresponde a orientação de S para fora e de $\tilde{S}$ para dentro. Teorema de Gauss: $0 = \iiint_{E_2} \operatorname{div}\overrightarrow{F} dV = \iint_{\partial E_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} + \iint_{\tilde{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} =$

$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} - 4\pi C \Rightarrow \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} = 4\pi C$.

A situação *(B)* se aplica ao campo $\overrightarrow{F}_2$ (quando $C = 3$ e $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -2)$) e ao campo $\overrightarrow{F}_3$ (quando $C = 1$ e $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$). Ambos os pontos $(0, 1, -2)$ e $(2, 0, 0)$ estão no interior de S pois $||(0, 1, -2) - (1, 1, 0)|| = \sqrt{5} < 3$ e $||(2, 0, 0 - (1, 1, 0)|| = \sqrt{2} < 3$. Assim $\iint_S \overrightarrow{F}_2 \cdot d\overrightarrow{S} = 12\pi$ e $\iint_S \overrightarrow{F}_3 \cdot d\overrightarrow{S} = 4\pi$.

Juntando *(A)* e *(B)*, obtemos: $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S \overrightarrow{F}_1 \cdot d\overrightarrow{S} + \iint_S \overrightarrow{F}_2 \cdot d\overrightarrow{S} + \iint_S \overrightarrow{F}_3 \cdot d\overrightarrow{S} = 72\pi + 12\pi + 4\pi = 88\pi$

Resposta: 88π