Universidade Federal de Pernambuco
3^0 Exercício Escolar de Cálculo 3
30 de Novembro de 2016
Aluno: **Turma:**

GABARITO

$1^{\underline{a}}$) **(4,0)** Determine, em cada item, se a série é convergente ou divergente, justificando quais os testes utilizados.

a) (2,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

b) (2,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n+3^n}{5^n+2^n+1}$

Solução:

a) Pelo Teste da Razão: com $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e > 1.$$

Resposta: A série é divergente.

b) Temos que : $n + 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n + 3^n = 3.3^n$, e $5^n + 2^n + 1 \geq 5^n$, logo,

$$0 \leq a_n = \frac{n+2^n+3^n}{5^n+2^n+1} \leq 3\left(\frac{3}{5}\right)^n,$$

portanto, comparando com a série cujo termo geral é $b_n = 3\frac{3^n}{5^n} = 3(3/5)^n$, que é convergente,(é uma série geométrica de razão positiva menor que 1), se tem que $a_n \leq b_n$, $n \geq 1$ e portanto é convergente.
Resposta: Convergente.

2ª) **(3,0)** Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

Solução: Usando o Teste da Razão: Com $a_n = 1/n \ln n$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = 1,$$

pois temos que,

$$1 \leq \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \frac{n}{n+1}, \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Assim, o raio de convergência é $R = 1$. Analisemos agora a convergência desta série nos extremos do intervalo: Em $x = -1$ temos a série alternada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ que se enquadra nas condições do teste de convergência de séries alternadas:

$$b_n = \frac{1}{n \ln n} \text{ é decrescente e } \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

logo a série é convergente em $x = -1$. Em $x = 1$ a série se torna $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, que é divergente pelo teste da integral, pois a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ é $g(x) = \ln(\ln x)$ e $\int_2^{\infty} f(x)dx = [g(x)]_2^{\infty} = \infty$.

Resposta: O raio de convergência é $R = 1$ e o intervalo de convergência é $I = [-1, 1)$.

$3^{\underline{a}}$ **(3,0)** Dada a função $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 1$.

a) (2,0) Escreva $f'(x)$ como série de potências centrada em 0.

b) (1,0) Usando o item anterior, calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

a) Como $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $(R = \infty)$, segue que $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$,

consequentemente, $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$

Resposta: $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$

b) Considerando a série do item anterior e substituindo x por 1 obtemos:

$$f'(1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Resposta: 1.