Universidade Federal de Pernambuco
3º Exercício Escolar de Cálculo 3
27 de Junho de 2016
Aluno: **Turma:**

É proibido o porte de celular. Justifique suas respostas.

1ª) **(2.0)** Calcule os limites:

a) (1,0) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\ln 2}{n}\right)^n$ **b)** (1,0) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n\cdot 2^n}$

Solução:

a) Tomamos $f(x) = \left(1-\frac{\ln 2}{x}\right)^x$, temos $f(x) = e^{x\ln(1-\frac{\ln 2}{x})}$. Calculamos o limite do expoente usando a Regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\ln(1-\frac{\ln 2}{x}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x-\ln 2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-\ln 2)-\ln(x)}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-\ln 2}-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln 2}{x(x-\ln 2)}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\ln 2\cdot\frac{1}{\frac{x(x-\ln 2)}{x^2}}\\
&= -\ln 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln 2}{x^2}} = -\ln 2\cdot\frac{1}{1-0} = -\ln 2
\end{aligned}$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\ln 2}{n}\right)^n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: $\frac{1}{2}$

b) Usando que $\ln n \leq n$ para todo $n \geq 1$, temos: $\dfrac{\ln n}{n\cdot 2^n} \leq \dfrac{n}{n\cdot 2} = \dfrac{1}{2^n}$.

Portanto $0 \leq \frac{\ln n}{n\cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$, segue do Teorema do Sanduíche que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n\cdot 2^n} = 0$.

Resposta: 0

2ª) **(3.0)** Determine, em cada item, se a série é convergente ou divergente. Especifique quais os testes utilizados.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+2n^3}{\sqrt{1-3n+7n^8}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}-1}$

Solução:

a) Usamos o Teste de Leibniz para concluir que a série é convergente, uma vez que a sequência $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ é positiva, descrescente e $\lim a_n = 0$.

Resposta: A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ é convergente.

b) Usamos o Teste da Comparação no Limite, comparando no limite $a_n = \frac{1+n+2n^3}{\sqrt{1-3n+7n^8}}$ com $b_n = \frac{n^3}{\sqrt{n^8}}$ (a escolha de b_n é feita observando quais são os termos dominantes no numerador e denominador):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n+2n^3}{\sqrt{1-3n+7n^8}}}{\frac{n^3}{\sqrt{n^8}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n+2n^3}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^8}}{\sqrt{1-3n+7n^8}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3}+\frac{n}{n^3}+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^8}-\frac{3n}{n^8}+7}}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \left(\neq 0\right)$$

Como $b_n = \frac{n^3}{\sqrt{n^8}} = \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$, então $\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n}$ é divergente, e do Teste segue que $\sum a_n$ também é divergente.

Resposta: A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+2n^3}{\sqrt{1-3n+7n^8}}$ é divergente.

c) Comparamos no limite $a_n = \frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}-1}$ com $b_n = \frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}$ e, depois, testamos a convergência da série $\sum b_n$ com o Teste da Raiz. (a escolha de b_n é feita observando quais são os termos dominantes no numerador e denominador)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}-1}}{\frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{n^2}}{n^{n^2}}\right)\left(\frac{(1+n)^{n^2}}{(1+n)^{n^2}-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(\frac{1}{\frac{(1+n)^{n^2}-1}{(1+n)^{n^2}}}\right) = \lim_{n\to\infty} 1\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(1+n)^{n^2}}} = 1 \quad \left(\neq 0\right)$$

Teste da Raiz para b_n: $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{n^2}{n}}}{(1+n)^{\frac{n^2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n} =$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Como $L<1$, segue que $\sum_n b_n$ convergente e, portanto, $\sum a_n$ também converge.

Resposta: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}-1}$ é convergente.

$3^{\underline{a}}$) **(3,0)** Determine, em cada item, o intervalo de convergência da série.

a) (1,5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(x-2)^n}{n}$ **b)** (1,5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(2n-1)}$

Solução:

a) Pelo Teste da Raiz: $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4(x-2)^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{n}}|x-2| = \frac{1\cdot|x-2|}{1} = |x-2|$

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Portanto o raio de convergência é $R = 1$ e o intervalo de convergência está centrado em $x = 2$. Analisemos os extremos:

$''x = 1'' \Rightarrow \sum \frac{4(-1)^n}{n} = 4\sum \frac{(-1)^n}{n}$, a qual é convergente pelo Teste de Leibniz (uma vez que $a_n = \frac{1}{n}$ é decrescente e converge para 0).

$''x = 3'' \Rightarrow \sum \frac{4}{n} = 4\sum \frac{1}{n}$, que é divergente, pois é múltipla da série harmônica.

Resposta: $[1, 3)$

b) Pelo Teste da Razão: $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(2(n+1)-1)}}{\frac{n(x-1)^n}{2^n(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot |x-1| =$
$1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x-1| = \dfrac{|x-1|}{2}$

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

Portanto o raio de convergência é $R = 2$ e o intervalo de convergência está centrado em $x = 1$. Analisemos os extremos:

$''x = -1'' \Rightarrow \sum \frac{n}{2n-1}(-1)^n$, a qual é divergente pelo Teste da Divergência (uma vez que o termo geral não converge pra 0).

$''x = 3'' \Rightarrow \sum \frac{n}{2n-1}$, a qual é divergente pelo Teste da Divergência (uma vez que o termo geral não converge pra 0).

Resposta: $(-1, 3)$

$4^{\underline{a}}$) **(2,0)**

a) (1,0) Obtenha a série de Taylor das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ centradas em $x = 0$ e determine o raio de convergência destas séries.

b) (1,0) Calcule o valor da soma: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^n (2n+1)!}$

Solução:

a) Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, as derivadas se repetem com período 4: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f''''(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$, $\cdots$. Em $x = 0$, o valor de $f^{(n)}(0)$ se alterna entre $0, 1, 0, -1$.

Como o termo geral da série de Taylor é $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, temos a série de Taylor: $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Analogamente, para $g(x) = \cos x$, as derivadas são: $g(x) = \cos x$, $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, $g''(x) = -\cos x$, $g'''(x) = \operatorname{sen} x$, $g''''(x) = \cos x = g(x)$, $\cdots$. Em $x = 0$, o valor de $g^{(n)}(0)$ se alterna entre $1, 0, -1, 0$. Portanto temos a série: $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Resposta: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

b) Tomando $x = \frac{\pi}{2}$ na série de Taylor de $\operatorname{sen} x$, vemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2 \cdot 2^{2n}(2n+1)!} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^n(2n+1)!} = 2$$

Resposta: 2

$5^{\underline{a}}$) **(Desafio Extra) (3,0)** Seja A o conjunto dos números naturais que não possuem o dígito 0 em sua expansão decimal. Verifique que $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ é convergente.

(O índice $n \in A$ no somatório indica que a soma dos termos $\frac{1}{n}$ é tomada sobre todos os n's que pertencem a A)

Solução: A quantidade de números com k dígitos (isto é, entre 10^{k-1} e 10^k) que pertencem a A é 9^k, isso pode ser visto por um raciocínio de contagem: tais números possuem k dígitos e cada dígito é escolhido no conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Sendo todos esses números maiores que 10^{k-1}, seus inversos são menores que $\frac{1}{10^{k-1}}$, assim a soma dos números de A com k dígitos é no máximo $\frac{9^k}{10^{k-1}}$.

Agrupando em blocos os números de A que possuem k dígitos, temos:

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11\cdots 11}+\cdots+\frac{1}{99\cdots 99}\right)+\cdots$$

aonde em cada parênteses somamos apenas o inverso dos números de k dígitos que não possuem o dígito 0 na representação decimal. Logo temos uma comparação com uma série geométrica:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in A}\frac{1}{n} &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11\cdots 11}+\cdots+\frac{1}{99\cdots 99}\right)+\cdots\\
&< \frac{9}{1}+\frac{9^2}{10}+\frac{9^3}{10^2}+\cdots+\frac{9^k}{10^{k-1}}+\cdots \qquad \left(=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{k-1}}\right)\\
&= 9\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 90
\end{aligned}$$

Assim $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ é uma série de termos positivos e é limitada, portanto é convergente.