4 LIMITES INTERESSANTES COM O NÚMERO π

RICARDO BORTOLOTTI

Exercício 1. Mostre que para todo inteiro $n \geq 1$ tem-se:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, para todo $n \geq 2$

(Dica: Use integração por partes com $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ e $v' = \operatorname{sen} x$)

b) $\displaystyle\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x dx} \leq 1$

c) $\displaystyle\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x dx} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)(2n-3)} \cdots \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{2}{\pi}$

d) Obtenha o **Produto de Wallis**:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}}$$

Exercício 2. Fixado qualquer $x \neq 0$, considere a sequência

$$a_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right), \ n \geq 1$$

a) Verifique que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{senx}{x}$

(Dica: $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) = \cdots$)

b) Tomando $x = \frac{\pi}{2}$ e usando a relação trigonométrica $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2 + 2\cos x}}{2}$, obtenha a **Fórmula de Viète**:

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots}$$

Exercício 3.

a) Determine a série de Taylor das funções $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = \operatorname{arctg} x$ em torno do 0 e o raio de convergência destas séries.

b) Definindo $p_n(x)$ o n-ésimo polinômio de Taylor da função $\operatorname{arctg} x$ e o resto $r_n(x) = \operatorname{arctg} x - p_n(x)$, verifique que $\lim_{n\to\infty} r_n(1) = 0$.

c) Obtenha a **Fórmula de Leibniz**:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}}$$

Exercício 4.

a) Determine a série de Taylor das funções $f(x) = e^x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = \cos x$ em torno de $x = 0$, determinando também seus raios de convergência.

b) Sabendo que a convergência da série $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ é válida também para todo número complexo z, obtenha a **Fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$$

(Dica: Substitua $z = i\theta$ na série de Taylor da exponencial, lembre-se de que as potências de i se alternam com período 4 entre $1, i, -1, -i$. Veja que a parte real de $e^{i\theta}$ corresponde à função seno e a parte imaginária à função cosseno)

c) Tomando $\theta = \pi$, obtenha a **Identidade de Euler**:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Obs: Esta é considerada por muitos a identidade mais bela de toda a Matemática por relacionar ao mesmo tempo os números π, e, i, 0 e 1.