ÁLGEBRA LINEAR NA PRIMEIRA FASE DA OBM-U

Problema 1 (OBM-U 2016 - Problema 3, 1a fase). *Encontre todas as matrizes* 2×2 *com entradas reais tais que*

$$A^3 - 3A^2 + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 2 (OBM-U 2016 - Problema 5, 1a fase). *Seja* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $A(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$. *Prove que existe um único* $s > 0$ *tal que o limite*

$$c = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{vol\big(\{v \in \mathbb{R}^3, ||v|| \leq 1, ||A(v)|| \leq \epsilon\}\big)}{\epsilon^s}$$

existe e é positivo, e determine s *e* c.

Problema 3 (OBM-U 2014 - Problema 2, 1a fase). *Considere as matrizes* 3×3 *cujas entradas são inteiros entre* 0 *e* 9 *(inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.*

Problema 4 (OBM-U 2014 - Problema 5, 1a fase). *Sejam* $t_1, t_2, \cdots, t_n$ *reais positivos tais que* $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 2\pi$ *e* O *um ponto fixo do plano. Considere a famlia de polgonos convexos de* n *lados contendo* O *em seu inteiros cujos ângulos externos sejam respectivamente* $t_1, t_2, \cdots, t_n$. *Sejam* y_i *o comprimento do i-ésimo lado, e* x_i *a distância de* O *ao i-ésimo lado.*

a) Mostre que o vetor $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *depende linearmente do vetor* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, *isto é, existe uma matriz* $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ *que só depende dos* t_i*'s,* $1 \leq i \leq n$, *tal que* $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ *para* $1 \leq i \leq n$.

b) Considere um segundo polgono desta famlia e defina x'_i *e* y'_i *de maneira análoga. Mostre que* $\sum_{i=1}^{n} x_i y'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i$.

Problema 5 (OBM-U 2013 - Problema 4, 1a fase). *Seja* $C = \{(X, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ *o crculo de raio 1 e considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$T(x, y) = \left(\frac{5x + 3y}{4}, \frac{3x + 5y}{4}\right).$$

Encontre todos os valores de n *natural para os quais* $T^n(X)$, *a imagem de* C *após* n *aplicações de* T, *contenha pelo menos* 2013 *pontos* (a, b) *com coordenadas* $a, b \in \mathbb{Z}$.

Problema 6 (OBM-U 2012 - Problema 5, 1a fase)**.** *Sejam* $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Para cada uma das matrizes* M_i, $i = 1, 2, 3$, *determine quantas matrizes* A_i *existem com* $A_i^5 = M_i$.

Problema 7 (OBM-U 2011 - Problema 6, 1a fase)**.** *Seja* X *uma matriz real quadrada* $n \times n$. *Suponha que existe um inteiro positivo* m *com* $(X^2 + I)^m = 0$.
a) Mostre que $n \neq 2011$.
b) Se $n = 2010$, *é possvel concluir que* $X^2 + I = 0$*?*

Problema 8 (OBM-U 2010 - Problema 6, 1a fase)**.** *Cada um dos itens a seguir apresentar um valor diferente para a matriz* B. *Para cada um desses valores, determine quantas matrizes reais* A *exitem tais que* $A^3 - 3A = B$.

a) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

c) $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Problema 9 (OBM-U 2009 - Problema 3, 1a fase)**.** *A rã Dõ descansa sobre o vértice* A *de um triângulo equilátero* ABC. *A cada minuto a rã salta do vértice em que está para um vértice adjacente, com probabilidade* p *de o salto ser no sentido horário e* $1 - p$ *de ser no sentido anti-horário, onde* $p \in (0, 1)$ *é uma constante. Seja* P_n *a probabilidade de, após* n *saltos, Dõ estar novamente no vértice* A.
a) Prove que, qualquer que seja $p \in (0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} P_n = 1/3$.
b) Prove que existe $p \in (0, 1/100)$ *tal que, para algum* n, $P_n = 1/\pi$.

Obs: Matrizes podem ajudar a resolver o problema acima.

Problema 10 (OBM-U 2009 - Problema 5, 1a fase)**.** *Dados os números reais* a, b, c, d, *considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}.$$

Se $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, *prove que*

$$\det A = f(1)f(i)f(-1)f(i).$$

(Aqui i *representa a unidade imaginária.)*

Problema 11 (OBM-U 2008 - Problema 4, 1a fase). *Suponha que existem duas matrizes reais inversveis $n \times n$, A e B, diferentes da matriz identidade I e satisfazendo:*

- $A^7 = I$
- $ABA^{-1} = B^2$

Mostre que existe um inteiro $k > 0$ tal que $B^k = I$ e determine o menor inteiro k com esta propriedade.

Problema 12 (OBM-U 2007 - Problema 5, 1a fase). *Calcule os auto-valores da matriz $(n+1) \times (n+1)$ abaixo:*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & n & \cdots & & \\ 1 & 0 & n-1 & & \\ & 2 & 0 & \cdots & \\ & & \cdots & 0 & 1 \\ & & & n & 0 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, $M_{i,i+1} = n+1-i$, $M_{i+1,i} = i$, $M_{i,j} = 0$ se $|i-j| \neq 1$.

Problema 13 (OBM-U 2005 - Problema 4, 1a fase). *Sejam A e B matrizes reais quadradas de mesma dimensão tais que, para todo inteiro positivo k, $(A+B)^k = A^k + B^k$. Prove que se A é invertvel então B é a matriz nula.*

Problema 14 (OBM-U 2005 - Problema 5, 1a fase). *Determine todos os valores de α para os quais a matriz $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ definida por $a_{i,j} = \cos((i-1) \times j\alpha)$, $1 \leq i, j \leq n$, tem determinante nulo.*

Problema 15 (OBM-U 2004 - Problema 1, 1a fase). *Considere a matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{2004}.

Problema 16 (OBM-U 2003 - Problema 3, 1a fase). *Sejam A e B matrizes $n \times n$ inversveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^k B^k$ para trs valores consecutivos de inteiros k, então $AB = BA$.*

Problema 17 (OBM-U 2002 - Problema 2, 1a fase). *Seja A a matriz real $n \times n$*

$$A = \begin{bmatrix} x+y & x & \cdots & x \\ x & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{bmatrix}.$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é inversível e calcule A^{-1}.

Problema 18 (OBM-U 2001 - Problema 5, 1a fase)**.** *Seja A uma matriz $n \times n$ com $a_{1,j} = a_{i,1} = 1$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, e $a_{i+1,j+1} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j}$ para quaisquer $1 \leq i, j < n$. Assim,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\ 1 & 5 & 13 & 25 & \cdots \\ 1 & 7 & 25 & 63 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$.