ÁLGEBRA LINEAR NA SEGUNDA FASE DA OBM-U

Problema 1 (OBM-U 2016 - Problema 4, 2a fase). *Seja* $A = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{bmatrix}$. *Encontre todos os pares de números* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *com* $|m| \leq n$ *tais que*

$$A^n - (n^2 + m)A$$

tenha todas as entradas inteiras.

Problema 2 (OBM-U 2015 - Problema 4, 2a fase). *Sejam* Q *uma matriz real ortogonal* $n \times n$ *(ou seja,* $QQ^T = Q^TQ = I$*) e* P *uma matriz real de permutação (ou seja, as entradas de* P *são iguais a* 0 *ou* 1*, com exatamente uma entrada igual a* 1 *por linha ou por coluna).*

Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:

a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 *e* U_1 *com* $Q = U_0PU_1$.

b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 *e* L_1 *com* $Q = L_0PL_1$.

Problema 3 (OBM-U 2012 - Problema 2, 2a fase). *Considere todas as matrizes quadradas de ordem* n *que têm* $4n$ *entradas iguais a* 1 *e* $4n$ *entradas iguais a* -1 *e as demais entradas iguais a* 0*. Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de* n*)?*

Problema 4 (OBM-U 2011 - Problema 5, 2a fase). *Se* $u_1, \cdots, u_k \in \mathbb{R}^3$*, denote por* $C(u_1, \cdots, u_k)$ *o cone gerado por* $u_1, \cdots, u_k$*:*

$$C(u_1, \cdots, u_k) = \{a_1u_1 + \cdots a_ku_k | a_1, \cdots, a_k \in [0, +\infty)\}$$

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 *pontos sorteados independente e uniformemente na esfera unitária* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Qual é a probabilidade de que $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$*?*

b) Qual é a probabilidade de que cada um dos quatro vetores sejam necessários para gerar $C(v_1, v_2, v_3, v_4)$*, isto é, que* $C(v_1, v_2, v_3) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $C(v_1, v_2, v_4) \neq C(v_1, v_3, v_4)$, $C(v_2, v_3, v_4) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$ *e* $C(v_1, v_2, v_3) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$*?*

Problema 5 (OBM-U 2011 - Problema 6, 2a fase). *Sejam* (x_n) *uma sequência de números inteiros que satisfaz uma recorrência linear de ordem* k *para um certo inteiro positivo* k *fixado, isto é, existem constantes reais* $c_1, c_2, \cdots, c_k$ *tais que*

$$x_{n+k} = \sum_{r=1}^{k} c_r x_{n+k-r}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Suponha que k *é o menor inteiro positivo com essa propriedade. Prove que* $c_j \in \mathbb{Z}$ *para todo* j *com* $1 \leq j \leq k$.

Problema 6 (OBM-U 2010 - Problema 3, 2a fase). *Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos e $n = n_1 n_2$. Considere a matriz real simétrica $n \times n$, $a = [a_i, j]_{1 \le i,j \le n}$, tal que para todo i:*

a) $a_{i,i} = 4$,

b) $a_{i,i+1} = a_{i,i+1} = -1$ quando $i+1$ não é múltiplo de n_1,

c) $a_{i,i+n_1} = a_{i+n_1,i} = -1$ quando $i+1$ não é múltiplo de n_1,

e as demais entradas $a_{i,j}$ são a iguais a 0.

Prove que A é invertível e todas as entradas de A^{-1} são positivas.

Problema 7 (OBM-U 2008 - Problema 5, 2a fase). *Prove que não existe uma matriz real 7×7 com entradas não negativas cujos auto-valores (contando com multiplicidade) são: $6, -5, -5, 1, 1, 1$ e 1.*

Problema 8 (OBM-U 2007 - Problema 5, 2a fase). *Seja A uma matriz real quadrada simétrica de ordem n, e $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ seus autovalores (contados com multiplicidade). Determine, em função de $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$:*

a) O nmero de matrizes reais B simétricas de ordem n tais que $B^2 = A$.

b) O nmero de matrizes reais B de ordem n tais que $B^2 = A$.

Problema 9 (OBM-U 2006 - Problema 6, 2a fase). *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prove que, para $n > 1$, não existem inteiros $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$ com $a_2, a_3, \cdots, a_n$ e $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ não todos nulos tais que

$$A^{a_1} B^{b_1} A^{a_2} B^{b_2} \cdots A^{a_n} B^{b_n} = I,$$

onde I é a matriz identidade.

Problema 10 (OBM-U 2005 - Problema 1, 2a fase). *Determine, em função de n, o número de possíveis valores para o determinante de A, dado que A é uma matriz real $n \times n$ tal que $A^3 - A^2 - 3A + 2I = 0$, onde I representa a matriz identidade $n \times n$, e 0 representa a matriz nula $n \times n$.*

Problema 11 (OBM-U 2005 - Problema 3, 2a fase). *Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores em $\mathbb{R}^2$ tais que $||v_i|| \le 1$ para $i \le 1 \le n$ e $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Prove que existe uma permutação σ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $||\sum_{j=1}^{k} v_{\sigma(j)}|| \le \sqrt{5}$ para $1 \le k \le n$.*

Problema 12 (OBM-U 2005 - Problema 6, 2a fase). *Prove que para quaisquer naturais $0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k$ e $0 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k$, a matriz $A = [a_{r,s}]_{1 \le r,s \le k}$ de ordem k dada por $a_{r,s} = \binom{i_r + j_s}{i_r} = \dfrac{(i_r + j_s)!}{i_r! j_s!}$ é inversível.*

Problema 13 (OBM-U 2004 - Problema 3, 2a fase). *Seja A uma matriz real inversível de ordem n e A^t sua transposta. Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ os autovalores de A^tA. Definimos a norma de A por $A = \sqrt{\lambda_1}$ e o fator de dilatação de A por $d(A) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. Prove que, para quaisquer matrizes reais inversíveis A e B, $d(AB) \geq \frac{||AB||}{||A||\cdot||B||}d(B)$.*

Problema 14 (OBM-U 2003 - Problema 3, 2a fase). *Seja $p > 2$ um número primo.*

Seja X_p o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 4 com coeficientes em $\mathbb{Z}/p$ para as quais $X^2 = I$. Calcule o número de elementos de X_p.

Problema 15 (OBM-U 2002 - Problema 2, 2a fase). *Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$ com $a_{i,i} = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| < 2$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Prove que $0 < \det(A) \leq 1$.

Problema 16 (OBM-U 2001 - Problema 3, 2a fase). *Definimos $SL(2, \mathbb{Z})$ como o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante 1. Seja $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ uma matriz tal que existe $n > 0$ inteiro com $A^n = I$.*

Prove que existe $X \in SL(2, \mathbb{Z})$ tal que $X^{-1}AX$ é igual a uma das matrizes:

$$\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$$