PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR NO CONCURSO GALOIS-NOETHER (DE 2011 A 2017)

Problema 1 (2017 - Problema 2). *Qual é o menor n para o qual qualquer matriz A $m \times m$ com entradas reais possa ser escrita como soma de n matrizes distintas de posto 1?*

Problema 2 (2017 - Problema 7). *Quantos valores inteiros de x no intervalo $[1, 100]$ fazem com que o determinante da seguinte matriz seja múltiplo de 3?*

$$\begin{bmatrix} x^2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & (x+2) \end{bmatrix}$$

Problema 3 (2017 - Problema 13). *Seja $M_4(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as matrizes 4×4 com entradas reais. Chamemos de V o subespaço gerado pelo conjunto*

$$\{AB - BA | A, b \in M_4(\mathbb{R})\}.$$

Qual é a dimensão de V?

Problema 4 (2016 - Problema 7). *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

qual é o valor do traço de A^5?

Problema 5 (2016 - Problema 18). *Seja $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por*

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3 - x_4, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}, 0).$$

Qual é a dimensão da imagem de T?

Problema 6 (2015 - Problema 5). *Encontre os valores de x tais que o determinante da matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

seja 0.

Problema 7 (2015 - Problema 11). *O conjunto V de $\mathbb{R}^3$ é formado pelos 8 vetores da forma (x, y, z), aonde x, y e z podem valer 0 ou 1.*

A direção entre dois vetores distintos u e v é a diferença $u - v$. Quantas direções distintas determinam os vetores de V?

Nota: As direções $u - v$ e $v - u$ são diferentes.

Problema 8 (2015 - Problema 22). *A matriz quadrada A é $n \times n$ para n um inteiro positivo ímpar. Se é válido que $A \cdot A^t = I$, quanto vale* $\det(A^2 - I)$*?*

Problema 9 (2014 - Problema 4). *Qual é o determinante da seguinte matriz?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema 10 (2014 - Problema 14). *Considere o espaço vetorial das sequências reais, onde cada elemento é da forma $(a_1, a_2, \cdots)$. Sejam T e T' as transformações dadas por:*

$$T(a_1, a_2, \cdots) = (0, a_1, a_2, \cdots)$$

e

$$T'(a_1, a_2, \cdots) = (a_2, a_3, a_4, \cdots).$$

Qual das seguintes afirmações é falsa?

(a) $T' \circ T = I$.
(b) T *é linear.*
(c) T' *é linear.*
(d) $T \circ T' = I$.

Problema 11 (2014 - Problema 20). *A matriz A com entradas reais é 2×2. Sabendo que A satisfaz $A^2 = I$ e $tr(A) = 0$, quais são os auto-valores de A?*

Problema 12 (2013 - Problema 4). *Seja $n = k^2$ com k inteiro. O determinante da seguinte matriz sempre é?*

$$\begin{bmatrix} n & 4 & n \\ 2 & n & 4 \\ n & 2 & n \end{bmatrix}$$

(a) Múltiplo de 3.
(b) Múltiplo de 8.
(c) Positivo.
(d) Um quadrado perfeito.

Problema 13 (2012 - Problema 5). *Considere $T : \mathbb{R}^{2012} \to \mathbb{R}^{1006}$ dada por*

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_{2012}) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, \cdots, x_{2011} + x_{2012}).$$

Qual é a dimensão do núcleo de T?

Problema 14 (2012 - Problema 12). *Qual é o determinante da seguinte matriz?*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 15 (2012 - Problema 20)**.** *A matriz A é 2×2 e tem entradas reais. O traço de A é 2 e seu determinante é 1. Uma expressão equivalente de A^{11} é:*

(a) a $11A + 10I$.
(b) a $10A - 11I$.
(c) a $11A - 10I$.
(d) a $10A + 11I$.

Obs: O Teorema de Cayley-Hamilton diz que A sempre se anula quando aplicada em seu polinômio característico. O polinômio característico é $p_A(t) = det(A - tI)$.

No caso de matrizes 2x2, o polinômio característico é $p_A(t) = t^2 - \operatorname{tr} At + \det A$. A relação $A^2 - tr(A) \cdot A + \det A \cdot I = 0$ permite escrever qualquer potência A^k, $k \geq 2$, em função de um potência menor.

Problema 16 (2011 - Problema 5)**.** *Qual é o posto da seguinte matriz?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Problema 17 (2011 - Problema 18)**.** *A matriz A é 3×3 e cumpre que:*

$$A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Qual é o valor de $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$*?*