Álgebra Linear

Giuliano Boava

Introdução

Nos problemas olímpicos, principalmente nos de nível universitário, é comum encontrarmos espaços e subespaços vetoriais, transformações lineares, matrizes, autovalores, autovetores, entre outros conceitos de álgebra linear. O objetivo deste texto é mostrar que, usando apenas ferramentas básicas, é possível resolver diversos problemas envolvendo este tema. Como a álgebra linear é um assunto amplo, optamos por tratar apenas dos problemas que abordam matrizes e suas propriedades.

O texto está dividido em duas seções: uma seção com definições e teoremas e outra com resolução de problemas. Na primeira seção, faremos uma breve introdução à teoria de matrizes, tratando desde as operações básicas até a fatoração de uma matriz na sua forma canônica de Jordan[1]. Na segunda seção, veremos como aplicar a teoria em problemas olímpicos.

Apesar de o texto não requerer conhecimento prévio, é aconselhável que o leitor tenha alguma familiaridade com a álgebra linear. Além disso, o conteúdo aqui exposto é extremamente resumido, não sendo recomendado àqueles que pretendem iniciar um curso de álgebra linear. Por fim, visto que o nosso foco são as aplicações da teoria, não demonstraremos os teoremas aqui apresentados. O leitor interessado nas demonstrações pode consultar as referências dispostas no final do texto.

Definições e Propriedades

Uma **matriz** real (ou complexa) A com m linhas e n colunas é uma função

$$\begin{array}{rcl} A:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C}) \\ (i,j) & \longmapsto & A(i,j). \end{array}$$

Esta é uma maneira formal de dizer que uma matriz é uma "tabela" de números. Apesar de a definição tratar uma matriz como função, veremos uma matriz A com m

[1]Camille Marie Ennemond Jordan (1838-1922) foi um matemático francês. Assim, a pronúncia de seu sobrenome é "Jordân".

linhas e n colunas sob a forma usual

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que a entrada a_{ij} da tabela corresponde a $A(i, j)$ (isto é, o valor da função A em (i, j)). Uma maneira compacta de denotar a matriz acima é $A = (a_{ij})$. O valor a_{ij} da matriz A é denominado **entrada** (i, j) ou (i, j)**-ésima entrada** de A. No contexto matricial, um número, real ou complexo, é normalmente chamado de **escalar**.

Uma matriz com m linhas e n colunas é dita uma matriz $m \times n$ (lê-se m por n). Uma matriz em que $n = 1$ (respectivamente, $m = 1$) é denominada um **vetor coluna** (respectivamente, **vetor linha**). Quando $m = n$, a matriz é dita **quadrada de ordem** n. Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, denominamos por **diagonal principal** a parcela da matriz formada pelos elementos a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn}. Uma matriz quadrada que possui todos os elementos abaixo (respectivamente, acima) da diagonal principal iguais a 0 é denominada matriz **triangular superior** (respectivamente, **triangular inferior**). Uma matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a 0 é denominada matriz **diagonal**. A matriz diagonal de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 é denominada matriz **identidade** e é denotada por I_n (ou simplesmente I, quando a ordem estiver subentendida).

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes reais (ou complexas) de dimensões $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) um escalar. A **soma** das matrizes A e B, denotada por $A + B$, é definida como a matriz $m \times n$ dada por $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. O **produto** das matrizes A e C, denotado por AC, é definido como a matriz $m \times p$ dada por $AC = (d_{ij})$, em que $d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$. A **multiplicação** do escalar λ pela matriz A, denotada por λA, é definida como a matriz $m \times n$ dada por $\lambda A = (\lambda a_{ij})$. A **transposta**[2] da matriz A, denotada por A^t, é definida como a matriz $n \times m$ dada por $A^t = (a_{ji})$.

É claro da definição que a operação de soma de matrizes é comutativa, associativa e distributiva com relação à multiplicação por escalar. Também é fácil verificar que a soma também é distributiva com relação ao produto matricial (por ambos os lados).

[2] A transposta de uma matriz é, normalmente, utilizada para matrizes reais. A definição também é válida para matrizes complexas mas, neste caso, tal definição não é tão útil. No caso complexo, a operação frequentemente utilizada no lugar da transposta é a operação que associa a uma matriz A, uma outra matriz A^*, denominada adjunta de A. A adjunta da A é a transposta de A com seus elementos conjugados.

Convém observar que o produto matricial não é comutativo! Uma conta um pouco mais trabalhosa é necessária para verificar que o produto matricial é associativo. Estas propriedades podem ser expressas por: $A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$; $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$; $(A+B)C=AC+BC$; $C(A+B)=CA+CB$; $AB\neq BA$ (em geral) e $(AB)C=A(BC)$. Há algumas propriedades interessantes da transposta: $(A^t)^t=A$; $(A+B)^t=A^t+B^t$; $(\lambda A)^t=\lambda A^t$ e $(AB)^t=B^tA^t$. A matriz identidade definida acima possui papel importante no produto de matrizes: se A é uma matriz $m\times n$, então $I_mA=A=AI_n$. É um bom exercício (porém, entediante) verificar todas essas propriedades.

Definição 1. Seja A uma matriz de quadrada de ordem n. Definimos o **traço** da matriz A, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, como a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A. Em outras palavras, se $A=(a_{ij})$, então $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

Exemplo 1. Se

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathrm{tr}(A)=1+(-3)+0=-2$.

Nosso próximo objetivo é definir o determinante de uma matriz quadrada. É comum, no ensino médio, dar uma definição explícita para o determinante de matrizes de ordem 1, 2 e 3 e definir o determinante de matrizes de ordem maior que 3 recursivamente, usando determinantes de matrizes de ordem inferior. Aqui, adotaremos uma outra definição, que é válida para matrizes de ordens arbitrárias. Antes disso, necessitamos da definição de permutação.

Definição 2. Uma **permutação** do conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ é uma bijeção $\sigma:\{1,2,\ldots,n\}\longrightarrow\{1,2,\ldots,n\}$. A **paridade** de uma permutação σ, denotada por $p(\sigma)$, é definida como o número de pares ordenados $(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}$ com $i<j$, para os quais $\sigma(i)>\sigma(j)$. O **sinal** de uma permutação σ é definido por $\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{p(\sigma)}$.

É comum (e mais prático) representar uma permutação σ por $\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n))$. Assim, uma permutação pode ser vista como uma n-upla de números naturais distintos (com valores em $\{1,2,\ldots,n\}$).

Exemplo 2. $\sigma_1=(3,4,1,5,2)$ e $\sigma_2=(2,3,4,5,1)$ são exemplos de permutações de $\{1,2,3,4,5\}$. Para σ_1, há 5 pares ordenados (i,j), com $i<j$, para os quais $\sigma_1(i)>\sigma_1(j)$; são eles: $(1,3)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,5)$ e $(4,5)$. Assim, $p(\sigma_1)=5$. Já para σ_2, a paridade é 4. Com isso, $\mathrm{sign}(\sigma_1)=(-1)^5=-1$ e $\mathrm{sign}(\sigma_2)=(-1)^4=1$.

Definição 3. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. O **determinante** da matriz A, denotado por $\det(A)$ ou $|A|$, é definido por

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

em que a soma é tomada sobre todas as permutações[3] σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo 3. Se $A = [a_{11}]$ é uma matriz 1×1, então só há uma permutação de $\{1\}$ (a saber, a permutação $\sigma = (1)$). Como não há pares (i, j) com $i < j$ neste caso, então a paridade de σ é 0 e, consequentemente, $\text{sign}(\sigma) = 1$. Logo, $\det(A) = a_{11}$. Notemos há duas permutações para $\{1, 2\}$: $\sigma_1 = (1, 2)$ (com paridade 0) e $\sigma_2 = (2, 1)$ (com paridade 1). Assim, no determinante de uma matriz 2×2, há dois termos na soma. Aplicando a definição a uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 2, obtemos

$$\det(A) = \text{sign}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \text{sign}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} =$$

$$(-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12},$$

que é a fórmula passada no ensino médio. Fica como exercício ao leitor desenvolver a definição acima para uma matriz de ordem 3 e verificar que ela é equivalente à definição dada no ensino médio, isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A proposição abaixo lista algumas propriedades do traço e do determinante de uma matriz.

Proposição 1. *Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então:*

(i) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;

(ii) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$;

(iii) Se $A = (a_{ij})$ é triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então $\det(A) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$;

(iv) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(v) $\det(A) = \det(A^t)$;

[3]Note que há $n!$ permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Assim, há $n!$ parcelas na soma.

(vi) Se uma matriz $\tilde{A}$ é obtida a partir de A pela troca da posição de duas linhas (ou colunas), então $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$*;*

(vii) Se uma matriz $\tilde{A}$ é obtida a partir de A multiplicando-se uma dada linha (ou coluna) por um número $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$*;*

(viii) Se uma matriz $\tilde{A}$ é obtida a partir de A acrescentando-se a uma linha (ou coluna) um múltiplo de uma outra linha (ou coluna), então $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

Definição 4. Seja A uma matriz $m \times n$. Uma matriz B é dita uma **inversa à direita** de A se $AB = I_m$. Uma matriz C é dita uma **inversa à esquerda** de A se $CA = I_n$. Se A possui inversa à direita (respectivamente, à esquerda), então a dita **invertível à direita** (respectivamente, **à esquerda**).

Exemplo 4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AB = I_2$, então A é uma inversa à esquerda para B e B é uma inversa à direita para A.

Muitos problemas com matrizes são resolvidos analisando o *posto* das matrizes envolvidas. Porém, para se falar de posto, normalmente é necessário falar de espaços vetoriais, combinações lineares e dependência linear. Nos próximos parágrafos, definiremos o posto de uma matriz evitando desenvolver a teoria de espaços vetoriais. Para isso, teremos que "mascarar" propriedades gerais dos espaços vetoriais em casos específicos.

O produto cartesiano[4] $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n vezes) é denotado por $\mathbb{R}^n$. Os elementos $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são denominados **vetores** e são da forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, em que $v_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Sejam $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. A **soma** dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, denotada por $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, é definida como o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$. A **multiplicação** do escalar λ pelo vetor $\mathbf{v}$, denotada por $\lambda\mathbf{v}$, é definida como o vetor $\lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n)$. O vetor $(0, 0, \ldots, 0)$ é usualmente denotado por $\mathbf{0}$.

É fácil ver que uma matriz $1 \times n$ ou $n \times 1$ (vetor linha ou vetor coluna) pode ser vista como um vetor de $\mathbb{R}^n$. Generalizando, as linhas de uma matriz $m \times n$ podem ser vistas como vetores de $\mathbb{R}^n$, assim como as colunas determinam vetores de $\mathbb{R}^m$. Precisaremos destas identificações na definição de posto.

[4] A partir daqui, até a definição de posto, tudo o que for feito para $\mathbb{R}$ também será válido para $\mathbb{C}$.

Definição 5. Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **linearmente dependente (LD)** se existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é dito **linearmente independente (LI)** se não é linearmente dependente.

Exemplo 5. Em $\mathbb{R}^2$, os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ são linearmente independentes. De fato, $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$ e, para que $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes pois $2\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Note que qualquer conjunto de vetores que contém o vetor $\mathbf{0}$ é linearmente dependente.

Definição 6. Seja A uma matriz $m \times n$. O **posto** de A, denotado por $\text{posto}(A)$ ou $\text{rank}(A)$, é definido como o maior número r para o qual existem r linhas de A linearmente independentes (identificando as linhas de A como vetores de $\mathbb{R}^n$).

Exemplo 6. Conforme exemplo anterior, a matriz

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

possui posto 2.

Proposição 2. *Se A é uma matriz $m \times n$, então:*

(i) $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^t)$, *isto é, o número máximo de linhas linearmente independentes coincide com o número máximo de colunas linearmente independentes;*

(ii) $\text{posto}(A) \leq \text{mín}\{m, n\}$;

(iii) Se $\tilde{A}$ é uma matriz obtida a partir de A como nos itens (vi) ou (viii) da proposição 1, então $\text{posto}(\tilde{A}) = \text{posto}(A)$.

O próximo resultado é essencial na resolução de problemas.

Teorema 3. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. São equivalentes:*

(i) $\text{posto}(A) = n$;

(ii) A é invertível à esquerda;

(iii) A é invertível à direita;

(iv) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *é único vetor coluna tal que* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(aqui,* $\mathbf{0}$ *representa a matriz* $n \times 1$ *formada somente por zeros);*

(v) Para todo vetor coluna $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$*, existe único vetor coluna* $\mathbf{x}$ *tal que* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*;*

(vi) $\det(A) \neq 0$.

Uma matriz A que não satistaz uma (portanto, todas) das condições acima é dita **singular**. *Se uma (consequentemente, todas) das condições acima é satisfeita, então A é denominada* **não singular**. *Neste caso, A possui única inversa à esquerda, única inversa à direita e tais inversas coincidem. A (única) inversa é denotada por* A^{-1} *e A é dita* **invertível**. *Além disso,* $\text{posto}(A^{-1}) = n$, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$ *e* $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ *é o único vetor coluna* $\mathbf{x}$ *do item (v).*

Proposição 4. *Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho, então AB é não singular se, e somente se, A e B são não singulares. Neste caso* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definição 7. Seja A uma matriz quadrada. Um escalar[5] $\lambda \in \mathbb{C}$ é dito um **autovalor** de A se existe um vetor coluna $\mathbf{x}$ (com entradas em $\mathbb{C}$) não nulo tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Neste caso, $\mathbf{x}$ é denominado um **autovetor** de A associado a λ.

Exemplo 7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ é não nulo, então $\lambda = -1$ é autovalor de A e $\mathbf{x}$ é autovetor associado a λ.

Sejam A uma matriz quadrada e λ um autovalor de A. Por definição, existe $\mathbf{x}$ não nulo tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tal equação pode ser reescrita na forma $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sendo I a matriz identidade. Como $\mathbf{x}$ é não nulo, segue do item *(iv)* do teorema 3 que a matriz $\lambda I - A$ é singular. Assim, pelo item *(vi)* do mesmo teorema devemos ter $\det(\lambda I - A) = 0$. Por outro lado, se A é uma matriz quadrada e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz $\det(\lambda I - A) = 0$, então segue dos itens *(iv)* e *(vi)* do teorema 3 que existe vetor coluna $\mathbf{x}$ não nulo tal que $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e, portanto, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Em outras palavras, um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de uma matriz A se, e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$.

Conforme definição de determinante, se A possui ordem n, então $\det(xI - A)$ tem como resultado um polinômio mônico (isto é, um polinômio com coeficiente líder igual

[5] Até agora, em todas as definições, poderíamos trabalhar em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. No caso de autovalores e autovetores, a teoria produz melhores resultados em $\mathbb{C}$.

a 1) de grau n na variável x. Tal polinômio é denominado **polinômio característico** de A e é denotado por $p_A^c(x)$. Como visto anteriormente, as raízes complexas de $p_A^c(x)$ são, exatamente, os autovalores de A. Pelo teorema fundamental da álgebra, $p_A^c(x)$ possui n raízes complexas (contando multiplicidades). A partir daqui, consideraremos que toda matriz A de ordem n possui n autovalores: as n raízes de $p_A^c(x)$. Se λ é uma raiz de multiplicidade r do polinômio característico, então dizemos que λ é um autovalor de multiplicidade r.

Proposição 5. *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ seus autovalores. Então:*

(i) $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$;

(ii) $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$;

(iii) Para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, os autovalores de $A + \lambda I$ são $\lambda + \lambda_1, \lambda + \lambda_2, \ldots, \lambda + \lambda_n$;

(iv) Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ são distintos e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ são autovetores associados, então o conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ é linearmente independente;

(v) A é não singular se, e somente se, $\lambda_i \neq 0$, para todo i;

(vi) Se A é não singular, então os autovalores de A^{-1} são $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$;

(vii) Se A é uma matriz real e simétrica (isto é, $A = A^t$), então $\lambda_i \in \mathbb{R}$, para todo i.

Seja A uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal. Aplicando o item *(iii)* da proposição 1 à matriz $xI - A$, concluímos que os elementos da diagonal principal de A são seus autovalores.

Se A é uma matriz quadrada real, então $p_A^c(x)$ é um polinômio com coeficientes reais. Logo, os autovalores não reais de A aparecem em pares conjugados.

Para qualquer matriz quadrada A de ordem n defina $A^0 = I_n$ e, para qualquer número inteiro positivo k, defina $A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ vezes}}$. Dessa forma, se $q(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinômio com coeficientes complexos, podemos definir $q(A) = a_r A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$. Observe que $q(A)$ é uma matriz e não um escalar.

Definição 8. Seja A uma matriz quadrada. O **polinômio minimal** de A, denotado por $p_A^m(x)$, é o polinômio mônico $q(x)$ (com coeficientes em $\mathbb{C}$) de menor grau tal que[6] $q(A) = \mathbf{0}$.

[6]Aqui, $\mathbf{0}$ representa a matriz quadrada do mesmo tamanho de A formada por zeros em todas as entradas.

Note que não há ambiguidade na definição acima. De fato, suponha que existam dois polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ que se encaixam na definição acima. Assim, ambos são mônicos e têm o mesmo grau k, logo $q(x) = q_1(x) - q_2(x)$ é um polinômio de grau menor que k tal que $q(A) = \mathbf{0}$. Se $q(x)$ não é o polinômio nulo, então podemos dividir $q(x)$ pelo seu coeficiente líder e obter um polinômio mônico de grau menor que k que se anula em A, contrariando a minimalidade de k. Portanto, devemos ter $q(x) = 0$ (isto é, $q(x)$ é o polinômio nulo) e, consequentemente, $q_1(x) = q_2(x)$.

Teorema 6. *Sejam A uma matriz quadrada, $p_A^c(x)$ seu polinômio característico e $p_A^m(x)$ seu polinômio minimal. Então:*

(i) Para qualquer polinômio $q(x)$, $q(A) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $p_A^m(x)$ divide $q(x)$;

(ii) $p_A^m(x)$ divide $p_A^c(x)$, isto é, $p_A^c(A) = \mathbf{0}$.

O item *(ii)* do teorema acima é conhecido como teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema 7 (Teorema do Mapeamento Espectral)**.** *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seus autovalores. Para qualquer polinômio $q(x)$ (com coeficientes em $\mathbb{C}$), os autovalores da matriz $q(A)$ são $q(\lambda_1), q(\lambda_2), \ldots, q(\lambda_n)$.*

Exemplo 8. Tomando $q(x) = x^k$ no teorema acima, concluímos que se λ é um autovalor de A, então λ^k é um autovalor de A^k.

Definição 9. Duas matrizes quadradas de mesmo tamanho A e B são ditas **semelhantes** ou **similares** se existe uma matriz não singular M tal que $A = MBM^{-1}$. Neste caso, a notação $A \sim B$ é empregada. Uma matriz que é semelhante a alguma matriz diagonal é dita **diagonalizável**.

Notemos que $A \sim A$ (pois $A = IAI^{-1}$), que $A \sim B$ implica $B \sim A$ (pois $A = MBM^{-1}$ implica $B = M^{-1}A(M^{-1})^{-1}$) e que $A \sim B$ e $B \sim C$ implicam $A \sim C$ (pois $A = MBM^{-1}$ e $B = NCN^{-1}$ implicam $A = (MN)C(MN)^{-1}$). Em outras palavras, a relação de semelhança entre matrizes é uma relação de equivalência.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e suponha que A possua n autovetores linearmente independentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Denote por λ_i o autovalor de A associado ao autovetor $\mathbf{x}_i$. Defina $X = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{x}_n]$, isto é, X é uma matriz $n \times n$ cujas colunas são os autovetores de A. Denote por Λ a matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas na diagonal principal são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (nesta ordem). Observe que

$$AX = A[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{x}_n] = [A\mathbf{x}_1 \,|\, A\mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, A\mathbf{x}_n] = [\lambda_1\mathbf{x}_1 \,|\, \lambda_2\mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \lambda_n\mathbf{x}_n] = X\Lambda.$$

Pela proposição 2 e pelo teorema 3, a matriz X é invertível. Logo,

$$AX = X\Lambda \implies AXX^{-1} = X\Lambda X^{-1} \implies A = X\Lambda X^{-1},$$

isto é, A é semelhante a uma matriz diagonal Λ formada pelos autovalores de A. Além disso, a matriz de semelhança X é dada pelos autovetores de A. Por outro lado, se $A = MDM^{-1}$ e D é uma matriz diagonal, então é possível provar que os autovalores de A estão na diagonal principal de D e que as colunas de M são os autovetores de A. Logo, o processo de encontrar uma matriz diagonal que seja semelhante a uma matriz A dada está intimamente relacionado com os autovalores e autovetores de A. Sempre que uma matriz A é escrita sob a forma $A = MDM^{-1}$ com D uma matriz diagonal, os problemas que envolvem A são consideravelmente simplificados. Porém, nem sempre uma matriz é diagonalizável.

Exemplo 9. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que A não é diagonalizável. Calculando o polinômio característico de A, obtemos $p_A^c(x) = \det(xI - A) = x^2$. Assim, os dois autovalores de A são iguais a 0. Se A fosse diagonalizável, então $A = MDM^{-1}$, com D uma matriz diagonal com os autovalores de A. Como os autovalores são iguais a 0, D é a matriz nula. Assim, teríamos $MDM^{-1} = \mathbf{0}$ independente da matriz M. Logo, A não é diagonalizável.

A próxima proposição fornece algumas condições suficientes para que uma matriz seja diagonalizável.

Proposição 8. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:*

(i) A é diagonalizável se, e somente se, A possui n autovetores linearmente independentes;

(ii) A é diagonalizável se, e somente se, toda raiz do polinômio minimal de A é simples;

(iii) A é diagonalizável se possui n autovalores distintos;

(iv) A é diagonalizável se A é uma matriz real e normal (isto é, $AA^t = A^tA$). Em particular, toda matriz real simétrica é diagonalizável.

Nosso último objetivo é definir matrizes na forma de Jordan. Uma matriz na forma de Jordan é uma matriz que é "quase" diagonal. A utilidade deste conceito é que *toda* matriz é semelhante a uma matriz na forma de Jordan.

Definição 10. Uma matriz quadrada de ordem r da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

é denominada um **bloco de Jordan de ordem** r associado a λ. Uma matriz quadrada A é dita estar na **forma canônica de Jordan** se

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_m \end{bmatrix},$$

em que cada M_i representa um bloco de Jordan.

Exemplo 10. A matriz

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c|c|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

está na forma canônica de Jordan.

Teorema 9. *Toda matriz quadrada A é semelhante a alguma matriz J na forma canônica de Jordan. Além disso, se $\tilde{J}$ é uma outra matriz na forma canônica de Jordan semelhante a A, então J e $\tilde{J}$ possuem os mesmos blocos de Jordan, com uma possível diferença na ordem dos blocos.*

O teorema acima, além de garantir uma decomposição de qualquer matriz quadrada A na forma $A = XJX^{-1}$, também afirma que J é única, a menos da ordem dos blocos. A partir daqui, duas formas de Jordan que diferem apenas pela ordem dos blocos serão consideradas “iguais”. Dessa maneira, toda matriz possui única forma de Jordan associada.

Teorema 10. *Duas matrizes quadradas de mesmo tamanho A e B são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma forma canônica de Jordan.*

Se J é a forma de Jordan de A então os elementos da diagonal principal de J são os autovalores de A. Assim, cada autovalor de A está associado a um certo número de blocos em J. Por outro lado, todo bloco de J está associado a algum autovalor de A.

Proposição 11. *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ os autovalores de A com multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_k$, respectivamente (portanto $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$). Seja J a forma de Jordan de A. Denote por $M_i^1, M_i^2, \ldots, M_i^{l_i}$ os blocos em J associados ao autovalor λ_i e seja d_i^j a ordem do bloco M_i^j. Denote por d_i o maior valor do conjunto $\{d_i^1, d_i^2, \ldots, d_i^{l_i}\}$. Então:*

(i) $d_i^1 + d_i^2 + \cdots + d_i^{l_i} = r_i$, *para todo i, isto é, a soma das ordens de todos os blocos associados ao autovalor λ_i coincide com a multiplicadade de λ_i;*

(ii) O número máximo de autovetores associados a λ_i linearmente independentes é l_i, ou seja, o número de blocos associados a λ_i;

(iii) O número máximo de autovetores de A linearmente independentes é $l_1 + l_2 + \cdots + l_k$, ou seja, o número de blocos em J;

(iv) $\operatorname{posto}(A) = n - b_0$, *em que b_0 representa o número de blocos de J associados ao autovalor 0 (se 0 não é autovalor, então $b_0 = 0$);*

(v) $p_A^c(x) = (x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}$;

(vi) $p_A^m(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k}$.

O próximo resultado mostra que matrizes semelhantes possuem muita semelhança!

Proposição 12. *Se A e B são duas matrizes semelhantes, então:*

(i) $\operatorname{posto}(A) = \operatorname{posto}(B)$;

(ii) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$;

(iii) $\det(A) = \det(B)$;

(iv) A e B possuem os mesmos autovalores;

(v) $p_A^c(x) = p_B^c(x)$;

(vi) $p_A^m(x) = p_B^m(x)$.

Problemas Envolvendo Matrizes

Esta seção contém uma seleção de problemas olímpicos envolvendo matrizes. Resolveremos alguns deles e o restante ficará como desafio ao leitor. As siglas IMC, OBM e OIMU que aparecem nos problemas se referem à Olimpíada Internacional de Matemática para Estudantes Universitários, à Olimpíada Brasileira de Matemática e à Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária, respectivamente. As soluções dos problemas deixados como exercício podem ser encontradas nos *sites* das competições.

Problema 1 (IMC 1995)**.** *Seja X uma matriz quadrada não singular com colunas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Seja Y uma matriz com colunas $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{0}$. Mostre que as matrizes $A = YX^{-1}$ e $B = X^{-1}Y$ têm posto $n-1$ e que seus autovalores são todos iguais a 0.*

Solução. Notemos que as colunas de Y são combinações lineares das colunas de X (neste caso, as combinações lineares são triviais). Sempre que isso ocorre, é possível encontrar uma matriz T tal que $Y = XT$. É fácil ver que, nesse caso,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como T é uma matriz triangular, então seus autovalores estão na diagonal principal. Logo, todos os autovalores de T são iguais a 0. Além disso, as $n-1$ primeiras colunas de T são LI e, portanto, posto$(T) = n-1$ (note que a última coluna é nula). Por fim, observemos que $A = YX^{-1} = XTX^{-1}$ e que $B = X^{-1}Y = X^{-1}XT = T$. Assim, $B = T$ tem as propriedades requeridas. Usando a proposição 12 e o fato de A e T serem semelhantes, concluímos que os autovalores de A são todos nulos e que posto$(A) = n-1$.

Problema 2 (IMC 1996)**.** *Sejam a_0 e d números reais fixados. Para $j = 0, 1, \ldots, n$,* *defina* $a_j = a_0 + jd$. *Calcule* $\det(A)$, *sendo*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Solução. Resolveremos o problema aplicando repetidas vezes os itens *(vii)* e *(viii)* da proposição 1. Para facilitar a escrita, adotaremos a notação $L_i = L_i + \lambda L_j$ para expressar que à linha i da matriz acrescentamos a linha j multiplicada por λ. Uma notação análoga será utilizada nas operações por colunas.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \overset{C_1 = C_1 + C_{n+1}}{=} \begin{vmatrix} 2a_0 + nd & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 2a_0 + nd & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 2a_0 + nd & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_0 + nd & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

$$= (2a_0 + nd) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \underset{i=n+1,n,\ldots,2}{\overset{L_i = L_i - L_{i-1}}{=}} (2a_0 + nd) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -d & -d & \cdots & -d \\ 0 & d & -d & \cdots & -d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d & d & \cdots & -d \end{vmatrix}$$

$$= (2a_0 + nd)d^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \underset{i=2,3,\ldots,n}{\overset{L_i = L_i + L_1}{=}} (2a_0 + nd)d^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (2a_0 + nd)d^n(-1)(-2)^{n-1} = (-1)^n(2a_0 + nd)2^{n-1}d^n.$$

No último passo, usamos que a matriz é triangular superior e, com isso, seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Problema 3 (IMC 2000)**.** *Sejam* A *e* B *matrizes quadradas de mesmo tamanho tais que* $\text{posto}(AB - BA) = 1$. *Mostre que* $(AB - BA)^2 = 0$.

Solução. Denote por C a matriz $AB - BA$. Como posto de C é um, segue do item *(iv)* da proposição 11 que C possui, pelo menos, $n - 1$ autovalores iguais a 0. Notemos que $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$. Logo, pelo item *(i)* da proposição 5, o outro autovalor também é igual a 0. Novamente pelo item *(iv)* da proposição 11, descobrimos que a forma de Jordan de C possui $n-1$ blocos e, portanto, há $n-2$ blocos de ordem 1 e um bloco de ordem 2. Em outras palavras, a forma de Jordan J de C (a menos da ordem dos blocos) é a matriz com 1 na entrada $(1,2)$ e 0 em todas as outras entradas. Claramente, $J^2 = \mathbf{0}$. Escrevendo $C = XJX^{-1}$ (conforme teorema 9), obtemos que $C^2 = XJX^{-1}XJX^{-1} = XJ^2X^{-1} = \mathbf{0}$.

Problema 4 (IMC 2003)**.** *Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que $3A^3 = A^2 + A + I$. Mostre que a sequência $(A^k)_{k\geq 1}$ converge para uma matriz idempotente. (Uma matriz B é dita idempotente se $B^2 = B$.)*

Solução. Pelo teorema 6, o polinômio minimal de A divide $q(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1$. Uma das raízes de $q(x)$ é 1 e as outras duas são raízes complexas (conjugadas) de módulo menor que 1. Como todas as raízes de $q(x)$ possuem multiplicidade 1, então o mesmo vale para o polinômio minimal de A. Logo, pela proposição 8, A é diagonalizável e, portanto, $A = X\Lambda X^{-1}$. Note que os possíveis valores na diagonal de Λ são as raízes de $q(x)$. Se $x_1 = 1$, x_2 e x_3 são as raízes de $q(x)$, então $\lim_{k\to\infty} x_1^k = 1$, $\lim_{k\to\infty} x_2^k = 0$ e $\lim_{k\to\infty} x_3^k = 0$ (pois x_2 e x_3 têm módulo menor que 1). Assim, $P = \lim_{k\to\infty} \Lambda^k$ é uma matriz diagonal com 0's e 1's na diagonal principal e, com isso, idempotente. Visto que $A^k = X\Lambda^k X^{-1}$, então $\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} X\Lambda^k X^{-1} = XPX^{-1}$. Por fim, basta observar que $(XPX^{-1})^2 = XPX^{-1}XPX^{-1} = XP^2X^{-1} = XPX^{-1}$.

Problema 5 (IMC 2003)**.** *Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que $AB + A + B = \mathbf{0}$. Mostre que $AB = BA$.*

Solução. Observe que $(A + I)(B + I) = AB + A + B + I = I$. Assim $A + I$ e $B + I$ são inversas uma da outra. Logo, $(B + I)(A + I) = I$ e, com isso, $BA + B + A = \mathbf{0}$. Juntando tal igualdade com a igualdade do enunciado, obtemos o resultado requerido.

Problema 6 (OBM 2002, nível universitário, 1ª fase)**.** *Seja A a matriz real $n \times n$*

$$A = \begin{bmatrix} x+y & x & \cdots & x \\ x & x+y & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{bmatrix}.$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é invertível e calcule A^{-1}.

Solução. Claramente, se $y = 0$, A não é invertível (pois terá posto, no máximo, 1). A soma das n linhas de A é o vetor $(nx + y, nx + y, \ldots, nx + y)$. Assim, se $nx + y = 0$, as n linhas de A serão LD e, por consequência, posto$(A) \leq n-1$. Portanto, A não é invertível se $nx+y=0$. Exibiremos a inversa de A se $y \neq 0$ e $nx+y \neq 0$. Observemos que $A = xU + yI$, em que U é a matriz com todas as entradas iguais a 1. Sempre que uma matriz B invertível pode ser escrita como um polinômio de uma matriz C, então a inversa de B também é um polinômio em C. Em nosso caso, A é um polinômio na matriz U e, portanto A^{-1} também é um polinômio em U. Visto que $U^k = n^{k-1}U$, então todo polinômio em U pode ser escrito como um polinômio de grau 1. Com isso, A^{-1} é da forma $aU + bI$. Impondo que $I = AA^{-1} = (xU+yI)(aU+bI)$, obtemos $b = \frac{1}{y}$ e $a = -\frac{x}{y(nx+y)}$. Isto mostra que $A^{-1} = \frac{1}{y}I - \frac{x}{y(nx+y)}U$.

Problema 7 (OBM 2008, nível universitário, 2ª fase)**.** *Prove que não existe uma matriz real 7×7 com entradas não negativas cujos autovalores (contando com multiplicidade) são: 6, -5, -5, 1, 1, 1 e 1.*

Solução. Suponha, por contradição, que exista uma matriz A 7×7 com entradas não negativas com tais autovalores. Note que A^k também é uma matriz com entradas não negativas, para qualquer $k \geq 1$. Em particular, $\operatorname{tr}(A^k) \geq 0$. Pelo teorema 7, os autovalores de A^k são 6^k, $(-5)^k$, $(-5)^k$, 1, 1, 1 e 1. Logo, $\operatorname{tr}(A^k) = 6^k + (-5)^k + (-5)^k + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 0$, para todo $k \geq 1$. Tomando $k = 3$, obtemos uma contradição.

Problema 8 (OIMU 2005)**.** *Considere matrizes reais quadradas A, B e C de ordem n tais que $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + I$ e C é simétrica. É possível ter $n = 2005$?*

Solução. Como $A^3 = -I$, então o polinômio minimal de A divide $q(x) = x^3 + 1$. Em particular, todo autovalor de A deve ser uma raiz de $q(x)$, as quais são $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Afirmamos que -1 não é autovalor de A. De fato, suponha por contadição que exista $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Assim, $(C^6 + C + I)\mathbf{x} = (BA^2 + BA)\mathbf{x} = B\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, isto é, 0 é autovalor de $C^6 + C + I$. Sabemos do teorema 7 que os autovalores de $C^6 + C + I$ são da forma $\lambda^6 + \lambda + 1$, em que λ é um autovalor de C. Visto que C é simétrica, então seus autovalores são reais (proposição 5). Portanto, os autovalores de $C^6 + C + I$ são da forma $\lambda^6 + \lambda + 1$, com λ real. Com ferramentas básicas de cálculo, é possível mostrar que $q(x) = x^6 + x + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, 0 não pode ser um autovalor de $C^6 + C + I$, contradição! Assim, os possíveis autovalores de A são $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Como A é real, tais autovalores aparecem aos pares, mostrando que a dimensão de A é par. Isto mostra que não podemos ter $n = 2005$.

Os próximos problemas ficam como exercício. Bom trabalho!

Problema 9 (IMC 1994)**.** *(a) Seja A uma matriz $n \times n$, $n \geq 2$, real, simétrica, invertível e com entradas positivas. Mostre que $z_n \leq n^2 - 2n$, sendo z_n o número de entradas nulas em A^{-1}.*

(b) Quantas entradas nulas há na inversa da matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & \ddots \end{bmatrix}?$$

Problema 10 (IMC 1997)**.** *Seja M uma matriz invertível de ordem $2n$, representada na forma de blocos como*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix},$$

em que cada bloco possui ordem n. Mostre que $\det(M)\det(H) = \det(A)$.

Problema 11 (IMC 1999)**.** *(a) Mostre que, para qualquer $m \in \mathbb{N}^*$, existe uma matriz real A $m \times m$ tal que $A^3 = A + I$.*

(b) Mostre que $\det(A) > 0$ *para toda matriz real A $m \times m$ que satisfaz $A^3 = A + I$.*

Problema 12 (IMC 2002)**.** *Calcule o determinante da matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$, em que*

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{se} \quad i \neq j, \\ 2, & \text{se} \quad i = j. \end{cases}$$

Problema 13 (IMC 2004)**.** *Sejam A uma matriz real 4×2 e B uma matriz real 2×4 tais que*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre BA.

Problema 14 (IMC 2005)**.** *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} = i + j$. Encontre o posto de A.*

Problema 15 (IMC 2009)**.** *Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de mesmo tamanho e suponha que A seja invertível. Mostre que se $(A - B)C = BA^{-1}$, então $C(A - B) = A^{-1}B$.*

Problema 16 (OBM 2001, nível universitário, 1ª fase)**.** *Seja A uma matriz $n \times n$ com $a_{1j} = a_{i1} = 1$ (para quaisquer i e j, $1 \leq i, j \leq n$) e $a_{i+1,j+1} = a_{ij} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$ (para quaisquer i e j, $1 \leq i, j < n$). Assim,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\ 1 & 5 & 13 & 25 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$.

Problema 17 (OBM 2003, nível universitário, 1ª fase)**.** *Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ invertíveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^k B^k$ para três valores inteiros consecutivos de k, então $AB = BA$.*

Problema 18 (OIMU 2004)**.** *Considere a matriz real quadrada $S = (s_{ij})$ de ordem n e entradas*

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}.$$

Calcule $\det(S)$.

Referências

[1] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right.* Second Edition. Springer-Verlag, 1997.

[2] Meyer, Carl D.. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Siam, 2000.