Universidade Federal de Pernambuco
Primeiro Exercício Escolar de Cálculo 3
16 de Junho de 2021
Aluno: **Turma T5**

Questão 1. Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ nos seguintes casos:

(a) (1,0) $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y, y^2 - z, z^2 - x)$, C é o segmento de reta de $(0,1,0)$ a $(1,2,-1)$.

(b) (1,0) $\vec{F}(x,y,z) = (x, -y, z)$, C parametrizada por $\vec{r}(t) = (e^t, t, t^2)$, $0 \le t \le 1$.

(c) (1,0) $\vec{F}(x,y) = (3y, 7x)$, C é a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ que está no primeiro quadrante orientada no sentido anti-horário.

Solução:

a) Parametrizamos C por $\vec{r}(t) = (0,1,0) + t[(1,2,-1) - (0,1,0)] = (t, 1+t, -t)$, $0 \le t \le 1$.

Então:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (t^2 - (1+t), (1+t)^2 + t, (-t)^2 - t) \cdot (1,1,-1)dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 1 - t + 1 + 2t + t^2 + t - t^2 + t)dt \\ &= \int_0^1 t^2 + 3tdt = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.\end{aligned}$$

b) O enunciado já dá a parametrização. Então:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (e^t, -t, t^2) \cdot (e^t, 1, 2t)dt = \int_0^1 (e^{2t} - t + 2t^3)dt \\ &= \left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{(e^2 - 1 + 1) - (1 - 0 + 0)}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}.\end{aligned}$$

c) Parametrizamos C por $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

Então:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} (6\,\mathrm{sen}\, t, 14\cos t) \cdot (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} (-12\,\mathrm{sen}^2\, t + 28\cos^2 t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-12 + 40\cos^2 t)dt = -12\frac{\pi}{2} + 40\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2}dt \\ &= -6\pi + 40\pi/4 + 40\left[\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = -6\pi + 10\pi + 0 = 4\pi.\end{aligned}$$

Questão 2. Seja C a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2)$, $0 \leq t \leq 2$.

(a) (1,0) Calcule o comprimento de C.

(b) (1,0) Reparametrize C pelo comprimento de arco.

Solução:

a) Temos $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = (12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t)$, logo $\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| = \sqrt{144 + 144t + 36t^2} = \sqrt{(12+6t)^2} = 12 + 6t$.

Então o comprimento é

$$\int_0^2 12 + 6t dt = [12t + 3t^2]_{t=0}^{t=2} = 24 + 12 = 36.$$

b) A função comprimento de arco é: $s(t) = \displaystyle\int_0^t \left\|\frac{d\vec{r}}{du}(u)\right\| du = \int_0^t (12 + 6u) du = 12t + 3t^2$.

Invertendo: $3t^2 + 12t - s = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-12 + \sqrt{144 + 12s}}{6} = -2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{12 + s}$.

Então a reparametrização é:

$$\vec{r}_0(s) = \vec{r}(t(s)) = \Big(-24 + 4\sqrt{3}\sqrt{12+s}), -168\big(-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{12+s}\big)^{\frac{3}{2}}, 24 - 4\sqrt{36+3s} + s\Big),$$

$0 \leq s \leq 36$.

Questão 3. Considere os campos vetoriais

$$\vec{F}(x,y) = (ye^x + y^3 + 2x, e^x + 3xy^2 + 2y) \quad \text{e} \quad \vec{G}(x,y) = (ye^x + x, e^x + 2x).$$

(a) (1,0) Verifique que $\vec{F}$ é conservativo e que $\vec{G}$ não é conservativo.

(b) (1,0) Obtenha um potencial para $\vec{F}$.

(c) (1.0) Calcule o trabalho exercido por $\vec{F}$ sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva parametrizada por $(\text{sen}(2t), 2\cos(t))$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Solução:

a) Calculamos o rotacional escalar de cada campo vetorial.

Para $\vec{F}$: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x + 3y^2 - (e^x + 3y^2) = 0.$

Como o domínio é o $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo, segue que $\vec{F}$ é conservativo.

Para $\vec{G}$: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x + 2 - e^x = 2 \neq 0$, logo $\vec{G}$ não é conservativo.

b) Se $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = ye^x + y^3 + 2x$ e $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = e^x + 3xy^2 + 2y$, integrando a primeira igualdade em relação a x, temos:

$$\phi(x,y) = ye^x + xy^3 + x^2 + c(y),$$

onde $c(y)$ é constante em x mas pode depender de y. Derivando em relação a y, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^x + 3xy^2 + c'(y).$$

Comparando com a primeira expressão da derivada parcial em relação a y, segue que

$$c'(y) = 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + c.$$

Em particular, $\phi(x,y) = ye^x + xy^3 + x^2 + y^2$ é um potencial para $\vec{F}$.

c) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para campos gradientes, e usando o potencial do item anterior:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(0,0) - \phi(0,2) = 0 - (2 + 0 + 0 + 4) = -6.$$

Questão 4. Utilizando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) (1,0) $\oint_C 2x^2y^3dy$, C é o retângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$.

(b) (1,0) $\oint_C 3xdx + x^3dy$, C é a curva é parametrizada por $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução:

a) Note que C é a fronteira do retângulo D de mesmos vértices. Pelo Teorema de Green:

$$\begin{aligned}\oint_C 2x^2y^3dy &= \iint_D (4xy^3 - 0)dxdy = \int_0^3 \int_0^2 4xy^3dxdy \\ &= \int_0^3 [2x^2y^3]_{x=0}^{x=2}dy = \int_0^3 8y^3dy = [2y^4]_{y=0}^{y=3} = 162.\end{aligned}$$

b) A curva é a circunferência centrada na origem de raio 2 percorrida no sentido anti-horário, então C é a fronteira do círculo D centrado na origem e raio 2.

Pelo Teorema de Green:

$$\oint_C 3xdx + x^3dy = \iint_D (3x^2 - 0)dxdy.$$

Em coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $dxdy = rdrd\theta$), temos:

$$\begin{aligned}\iint_D 3x^2dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\cos^2\theta r drd\theta = \int_0^2 3r^3dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \\ &= \left[\frac{3}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2} \cdot \left[\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 12\pi.\end{aligned}$$