Universidade Federal de Pernambuco
Exame Final de Cálculo 3
25 de Agosto de 2021
Aluno: **Turma:**

Questão 1. (2.0) Determine o trabalho realizado pelo campo de força

$$\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$$

em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

Solução: Parametrizamos a curva por $\vec{r}(t) = (t^2 + 1, t)$, $0 \leq t \leq 1$.
Então $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (2t, 1)$ e:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, 2t(t^2+1)) \cdot (2t, 1)dt = \int_0^1 2t^3 + 2t^3 + 2tdt = \int_0^1 4t^3 + 2tdt = [t^4 + t^2]_{t=0}^{t=1} = 2$$

Questão 2. (2.5) Calcule a área da parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Parametrizamos esta superfície por $\vec{r}(x, y) = (x, y, xy)$, com domínio $D : x^2 + y^2 = 1$.
Temos:
$\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 0, y)$, $\frac{d\vec{r}}{dy} = (0, 1, x)$ e $\frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy} = (-y, -x, 1)$.
Então $\|\frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy}\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.
Logo a área é:

$$A = \int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Fazemos a mudança de variáveis para coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $dxdy = rdrd\theta$. Então:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} rdrd\theta = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + r^2} dr.$$

Agora fazemos $u = 1 + r^2$, logo $du = 2rdr$, e

$$A = \pi \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} dr = \pi[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}]_{u=1}^{u=2} = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Questão 3. (2.0) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz, 2xz, e^{xy} + \cos(2\pi z^3))$$

e C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

Solução: Esta curva é a fronteira da superfície da parte do plano $z = 5$ que está dentro do cilindro. Logo parametrizamos a superfície por: $\vec{r}(x,y) = (x, y, 5)$, com domínio $D : x^2 + y^2 = 16$.

Temos: $\frac{d\vec{r}}{dx} = (1,0,0)$, $\frac{d\vec{r}}{dy} = (0,1,0)$ e $\frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy} = (0,0,1)$.

Logo tal superfície está orientada para cima, e C está orientada positivamente em relação a essa parametrização.

Pelo Teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

O rotacioanl de $\vec{F}$ é: $\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = (xe^{xy} - 2x, -ye^{xy} + y, z)$. Logo:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}(x,y)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy} dxdy = \iint_D (xe^{xy} - 2x, -ye^{xy} + y, 5) \cdot (0,0,1) dxdy$$

$$= \iint_D 5dxdy = 5\,\text{area}(D) = 5 \times 16\pi = 90\pi.$$

Questão 4. (3.5) Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

(a) (1.0) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

(b) (1.0) Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, qual a série de potências da integral de $f(x)$?

(c) (1.0) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ é a série de Maclaurin de que função?

(d) (0.5) Use o item anterior para calcular o valor da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}.$$

Solução:

a) Pelo Teste da Raiz: $L = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{n+1}\right)^n} = |x| \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = |x|$.

Logo a série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$, então o raio de convergência é $R = 1$.

Analisando nos extremos, para $x = 1$ temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, que é a série harmônica, logo diverge. Para $x = -1$, temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, que é alternada, e pelo Teste de Leibniz vemos que converge ($b_n = 1/(n+1)$ é decrescente e tende a 0).

Logo o intervalo de convergência é $[-1, 1)$.

b) Integramos termo a termo:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}.$$

c) Vamos multiplicar por x e derivar:

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow (xf(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Essa última série é a série geométrica com termo inical x.

Integrando, temos:

$$xf(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt + \int_0^x \frac{t-1}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - x = -x - \log(1-x)$$

Dividindo por x:

$$f(x) = -1 - \frac{1}{x} \log(1-x)$$

d) Substituimos $x = 1/3$ no item acima (o que é possível porque o raio de convergência é 1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n} = -1 - 3\log(1 - \frac{1}{3}) = -1 - 3\log(2/3) = -1 + 3(\log 3 - \log 2).$$