Universidade Federal de Pernambuco
Segundo Exercício Escolar de Cálculo 3
14 de Julho de 2021
Aluno: **Turma T5**

Questão 1. Calcule a integral de superfície $\iint_S \rho dS$, onde $\rho(x, y, z) = 3\sqrt{1 + 4z}$ e S é a superfície parametrizada por $\vec{r}(u, v) = (u + v, v, v^2)$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 3$.

Solução: Trata-se de uma integral de superfície de uma função escalar. Temos:

$$\vec{r}_u = (1, 0, 0), \vec{r}_v = (1, 1, 2v) \text{ e } \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0, -2v, 1).$$

Então $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{1 + 4v^2}$.

$$\iint_S \rho dS = \int_0^3 \int_0^2 3\sqrt{1 + 4v^2}\sqrt{1 + 4v^2} du dv = \int_0^3 \int_0^2 3 + 12v^2 du dv$$
$$= \int_0^3 6 + 24v^2 dv = [6v + 8v^3]_{v=0}^{v=3} = 18 + 216 = 234.$$

Questão 2. Calcule a área da superfície da parte do plano $12x - 3y + 4z = 2$ que está entre os planos $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 2$.

Solução: Podemos parametrizar como o gráfico de $z = \frac{1}{4}(2 - 12x + 3y)$, ou seja, por $\vec{r}(u, v) = (u, v, \frac{1}{4}(2 - 12u + 3v))$, com domínio sobre o retângulo $D : -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$. Temos:

$$\vec{r}_u = (1, 0, -3), \vec{r}_v = (0, 1, \frac{3}{4}) \text{ e } \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (3, -\frac{3}{4}, 1).$$

Então $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{9 + \frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{13}{4}$. Portanto a área é:

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{13}{4} du dv = \frac{13}{4} \cdot 4 = 13.$$

Questão 3. Usando o Teorema de Stokes, calcule a circulação do campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (-x^2y + e^x, z + cos(y^3), z^3)$$

ao redor da curva C dada pela interseção do cilindro $x^2+y^2 = 4$ com o plano $y+z = 5$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução: O rotacional de $\vec{F}$ é: $\operatorname{rot}\vec{F} = (-1, 0, x^2)$.

Observe também que C é a fronteira da superfície S que é a parte do cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ que está contida no plano $y+z = 5$ orientada para cima. Note que dessa maneira, C está positivamente orientada em relação à orientação de S.

Então pelo Teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Parametrizamos S como o gráfico de $z = 5-y$: $\vec{r}(u,v) = (u, v, 5-v)$, com domínio $D : u^2+v^2 \leq 4$.

$$\vec{r}_u = (1,0,0), \vec{r}_v = (0,1,-1) \text{ e } \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0,1,1).$$

Calculamos

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (-1,0,u^2)\cdot(0,1,1)dudv = \iint_D u^2 dudv.$$

Fazendo mudança de variáveis em coordenadas polares: $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $(dudv = rdrd\theta)$, temos:

$$\iint_D u^2 dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos^2(\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr = \pi \cdot \frac{16}{4} = 4\pi.$$

Questão 4. Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo do campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^z, \cos(x^3+1) + z, z^3 + 3zy^2)$$

para fora da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Solução: O divergente de $\vec{F}$ é: $\operatorname{div}\vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$.
Note que a superfície esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 = 5$ é a fronteira da esfera $E : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$, então

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F} dxdydz = \iiint_E 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 dxdydz.$$

Vamos mudar para coordenadas esféricas: $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{5}$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. ($dxdydz = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$). Note que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, logo:

$$\begin{aligned}\iiint_E 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{5}} 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{5}} 3\rho^4 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 3 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^{5} \rho^4 d\rho = 2\pi[-\cos\phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{(\sqrt{5})^5}{5} = 6\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{5} = 60\pi\sqrt{5}\end{aligned}$$