Universidade Federal de Pernambuco
Terceiro Exercício Escolar de Cálculo 3
28 de Junho de 2017
Aluno: Turma:

GABARITO

Questão 1. (2.0) Considere a sequência $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$, $n \geq 0$.

(a) (1.0) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) (1.0) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente ou divergente?

Solução:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1+1/n}{9+1/n}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{9+0}} = 1/3.$

Resposta: $\lim\limits_{n\to\infty} = 1/3.$

(b) Como a_n não converge para 0, o Teste da Divergência garante que esta série é divergente.

Resposta: $\sum a_n$ é divergente.

Questão 2. (3.0) Determine, em cada item, se a série é convergente ou divergente, determinando também qual o modo de convergência. Especifique os testes utilizados.

(a) (1.0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

(b) (1.0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(c) (1.0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n - \sqrt{n^2 - 1}$

Solução:

(a) Note que $n! \geq 2^n$ para $n \geq 4$. Tomando $a_n = \frac{n!}{2^n}$, segue que $a_n \geq 1$ para $n \geq 4$, em particular, a_n não converge para 0 e o Teste da Divergência garante que essa série é divergente.

Obs: Esse exercício pode ser resolvido também pelo Teste da Razão.

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ é divergente.

(b) Aplicamos o Teste da Raiz:

$$L = \lim \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} < 1$$

Portanto a série é absolutamente convergente.

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ é absolutamente convergente.

(c) Primeiro simplificamos usando a relação $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ e depois utilizamos o Teste de Comparação de Limite:

$a_n = n - \sqrt{n^2 - 1} = \dfrac{n^2 - (n^2 - 1)}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

Logo a_n é comparável a $b_n = \frac{1}{n}$. De fato: $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$.

Como $\sum \frac{1}{n}$ é divergente (é a série harmônica), pelo Teste de Comparação de Limite segue que $\sum a_n$ também é divergente.

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} n - \sqrt{n^2 - 1}$ é divergente.

Questão 3. (3.0) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x+3)^n}{n\ln n}$$

Solução:

Pelo Teste da Raiz:

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n(2x+3)^n}{n\ln n}\right|} = |2x+3| \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln n}} = |2x+3|.$$

Temos $L < 1 \leftrightarrow |2x+3| < 1 \leftrightarrow -1 < 2x+3 < 1 \leftrightarrow -2 < x < -1$. Portanto a série é convergente para $x \in (-2,-1)$ e é divergente para $x < -2$ ou $x > -1$. Resta analisar os 2 extremos:

Para $x = -2$, a série se torna $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, a qual é divergente pelo Teste da Integral, que se aplica pois a função $f(x) = 1/x\ln x$ é positiva, decrescente e sua primitiva ($F(x) = \ln\ln x$) tende a $+\infty$ quando $x \to \infty$.

Para $x = -1$, a série se torna $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$, a qual é convergente pelo Teste de Leibniz, que se aplica pois a sequência $b_n = 1/n\ln n$ é positiva, decrescente e converge para 0.

Resposta: O intervalo de convergência é $I = (-2,-1]$ e o raio de convergência é $R = 1/2$.

Questão 4. (2.0) Considere a função $f(x) = \operatorname{tg} x$.

(a) (1.0) Determine o polinômio de Taylor de 3º grau centrado em $x_0 = 0$ de $f(x)$.

(b) (1.0) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}(\frac{1}{n^2})$ é convergente ou divergente.

Solução:

(a) Basta calcular as três primeiras derivadas de $f(x)$ no 0:

$\operatorname{tg} 0 = 0;$

$\operatorname{tg}' x = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \to \operatorname{tg}' 0 = 1;$

$\operatorname{tg}'' x = \frac{2 \cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^4 x} \to \operatorname{tg}'' 0 = 0;$

$\operatorname{tg}''' x = \frac{2\cos(2x)\cos^4 x + \operatorname{sen}(2x) 4 \cos^3 x \operatorname{sen}(x)}{\cos^8 x} \to \operatorname{tg}''' 0 = 2.$

Portanto $P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x + \frac{2}{6}x^3 = x + \frac{1}{3}x^3.$

Resposta: $P_3(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3.$

(b) Usamos o Teste de Comparação de Limite para $a_n = n \operatorname{tg}(1/n^2)$.

A expansão de $\operatorname{tg} x$ em série de Maclaurin garante que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Assim, $\operatorname{tg} x$ é comparável a $\frac{1}{n}$, e a_n é comparável a $b_n = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$. Como $\sum_n b_n$ é divergente, segue que $\sum_n a_n$ também é.

Resposta: $\sum a_n$ é divergente.