Universidade Federal de Pernambuco
Terceiro Exercício Escolar de Cálculo 3
18 de Agosto de 2021
Aluno: **Turma:**

GABARITO

Questão 1. (5.0) Determine, em cada item, se a série é convergente ou divergente, determinando também qual o modo de convergência. Especifique os testes utilizados.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + 3}{3^n + n^8 + 7}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$

Solução:

(a) Pelo Teste da Razão, vemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = 1/2.$$

Como $L < 1$, segue que a série converge absolutamente.

Resposta: A série é absolutamente convergente.

(b) Pelo Teste de Comparação de Limite, se $a_n = \frac{2^n+n^2+3}{3^n+n^8+7}$, consideramos $b_n = \frac{2^n}{3^n}$ (tomando os maiores termos). Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+n^2+3}{3^n+n^8+7}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{n^2+3}{2^n}}{1+\frac{n^8+7}{3^n}} = 1.$$

Como $\sum b_n = \sum (\frac{2}{3})^n$ é uma série geométrica de razão $2/3$, então é convergente. E como $\frac{2^n+n^2+3}{3^n+n^8+7}$ são termos positivos, segue que a série converge absolutamente.

Resposta: A série é absolutamente convergente.

(c) Aplicamos o Teste da Integral, considerando $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, que é contínua, positiva e decrescente.

$\int_1^y \frac{1}{x \log x} dx$ é calculada fazendo a mudança de variáveis $u = \log x$, para a qual $du = \frac{1}{x} dx$. Então:

$$\int_2^y \frac{1}{x \log x} dx = \int_{\log 2}^{\log y} \frac{1}{u} du = \log \log y - \log \log 2 \to +\infty.$$

Portanto a série é divergente.

Resposta: A série é divergente.

(d) Temos uma série alternada, então aplicamos o Teste de Leibniz.

Considerando $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, vemos claramente que b_n é decrescente e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Portanto a série converge.

Para saber o modo de convergência, temos que estudar a convergência da série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Para isso, vamos usar o Teste de Comparação do Limite, comparando $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ com $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$ (b_n foi escolhida considerando apenas o maior termo na raiz).

Claramente $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^2}}} = 1$. A série $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ é a série harmônica, a qual é divergente.

Resposta: A série é condicionalmente convergente.

Questão 2. (3.0) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n2^n}$$

Solução:

Pelo Teste da Raiz:

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\left|\frac{(3x-1)^n}{n2^n}\right|} = |3x-1| \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}2} = \frac{|3x-1|}{2}.$$

Temos $L < 1 \leftrightarrow |3x-1| < 2 \leftrightarrow |x-1/3| < 2/3 \leftrightarrow -2/3 < x - 1/3 < 2/3 \leftrightarrow -1/3 < x < 1 \leftrightarrow \frac{-1}{3} < x < 1$. Portanto a série é convergente para $x \in (\frac{-1}{3}, 1)$ e é divergente para $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 1$. De $|x - 1/3| < 2/3$, se conclui que a série está centrada em $x = 1/3$ e o raio de convergência é $2/3$. Resta analisar os 2 extremos:

Para $x = -\frac{1}{3}$, a série se torna $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, a qual é convergente pelo Teste de Leibniz, que se aplica pois a sequência $b_n = 1/n$ é decrescente e tende a 0.

Para $x = 1$, a série se torna $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é a série harmônica, a qual é divergente.

Resposta: O intervalo de convergência é $I = [-\frac{1}{3}, 1)$ e o raio de convergência é $R = 2/3$.

Questão 3. (2.0) Usando as séries de Maclaurin conhecidas, calcule as seguintes somas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}$

Solução:

(a) Recordemos que $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$.

Para $x = -1$, temos a série desta questão. Logo:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Resposta: e^{-1}

(b) Recordemos que $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Para $x = \pi/4$, temos a série desta questão. Então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!} = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$