CÁLCULO NA PRIMEIRA FASE DA OBM-U

Problema 1 (OBM-U 2016 - Problema 2, 1a Fase). *Seja $a \geq 1$ um número real. No plano cartesiano, onde convencionamos que a distância unitária é igual a 1 metro, considere os pontos $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ e a reta $l = \{(x, y)\ x = 0\}$. Sonic, o porco-espinho, está no ponto A e quer correr até o ponto B tocando na parede l. Antes de tocar na parede, Sonic tem velocidade de 1 metro por segundo e após tocar na parede ele ganha um impulso e passa a ter velocidade de α metros por segundo. Sonic quer minimizar o tempo gasto em seu trajeto.*

(i) Prove que há exatamente um ponto $(0, y(\alpha)) \in l$ no qual Sonic deve tocar a parede para realizar seu trajeto de tempo mínimo.

(ii) Encontre o valor de α para o qual $y(\alpha) = 1/4$.

(iii) Determine o valor de $\theta \in \mathbb{R}$ para o qual o limite

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha^\theta \cdot y(\alpha)$$

existe e é não-nulo. Calcule o valor do limite neste caso.

Problema 2 (OBM-U 2015 - Problema 2, 1a Fase). *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + ... + \sqrt{x + \sqrt{x + 1}}}},$$

com dez raízes quadradas. Calcule $f'(0)$.

Problema 3 (OBM-U 2015 - Problema 3, 1a Fase). *Randonaldo escolhe ao acaso dois números reais b e c do intervalo $[0, \alpha]$ (ou seja, tanto b quanto c tem distribuição uniforme em $[0, \alpha]$), e resolve a equação $x^2 + bx + c = 0$. A probabilidade de a equação ter soluções reais é $1/2$. Qual é o valor de α?*

Problema 4 (OBM-U 2014 - Problema 1, 1a Fase). *Turbo, o caracol, está participando de uma corrida. Nos últimos 1000 mm, Turbo, que está a 1 mm por hora, se motiva e passa a correr de modo que sua velocidade seja inversamente proporcional à distância que falta. Em quanto tempo Turbo percorre esses 1000 mm finais?*

Problema 5 (OBM-U 2014 - Problema 4, 1a Fase). *Seja D_n o conjuntos dos números racionais p/q com $1 \leq q \leq n$, $0 \leq p \leq q$.*

a) Prove que, para todo $n \geq 3$, dados $x, y \in D_n$ distintos, temos sempre

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| \geq \frac{\pi^2}{n^3}.$$

b) Prove que para todo $c > \pi^2$ e todo n_0 natural existe $n > n_0$ e $x, y \in D_n$ distintos tais que

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| < \frac{c}{n^3}.$$

Problema 6 (OBM-U 2013 - Problema 2, 1a fase). *Encontre o valor mínimo de*

$$\sqrt{\tan^8 - 4\tan^4 x + \tan^2 x - 2\tan x + 5} + \sqrt{\tan^8 - 6\tan^4 x + \tan^2 x - 4\tan x + 13}$$

para $x \in (0, \pi/2)$.

Problema 7 (OBM-U 2013 - Problema 3, 1a fase). *Considere a parábola de equação $y = x^2/4$. Encontre o raio da circunferência que é tangente a esta parábola e ao eixo y no foco $(0, 1)$ da parábola.*

Problema 8 (OBM-U 2013 - Problema 6, 1a fase). *Seja $P = \{a^b | a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 1\}$ o conjunto das potências perfeitas. Prove que a série infinita*

$$\sum_{m \in P} \frac{1}{m-1}$$

é igual a 1.

Problema 9 (OBM-U 2012 - Problema 1, 1a fase).

a) Determine o maior valor possível de $|\sin^2(x) \cdot \sin(2x)|$ para $x \in \mathbb{R}$.

b) Prove que para todo inteiro k, se $x = \frac{2\pi r}{2^k - 1}$, com r inteiro, então

$$\left| \prod_{j=0}^{k-1} \sin(2^j x) \right| = \left| \sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \cdots \cdot \sin(2^{k-1} x) \right| \leq (\sqrt{3}/2)^k.$$

Problema 10 (OBM-U 2012 - Problema 2, 1a fase). *Considere a função dada por $f(x) = (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$, definida para $x > 0$.*

a) Mostre que f é estritamente crescente.

b) Seja $V(y)$ definida por $V(y) = x$ se e somente se $f(x) = y$. Dados $0 < a < b < c$ números reais, considere a equação $a^x + b^x = c^x$. Escreva x em função de a, b, c usando funções elementares e a função V.

Problema 11 (OBM-U 2012 - Problema 6, 1a fase). *Considere a parábola formada pelos pontos (x, x^2), $x \in \mathbb{R}$, e a sequência $x_n = n^\alpha$, onde $\alpha > 0$ é uma constante real. Considere a região formada pelos pontos (x, y) com $x > 0$ e que se situam abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola nos pontos (x_n, x_n^2), $n \geq 0$. Para que valores de α essa região tem área infinita?*

Problema 12 (OBM-U 2011 - Problema 1, 1a fase). *Calcule o valor de*

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}}.$$

Problema 13 (OBM-U 2011 - Problema 2, 1a fase). *Calcule o volume da região definida por:*

$$x^2+y^2\leq 1 \quad , \quad 0\leq z\leq 2+(x^4-6x^2y^2+y^4)^{2011}.$$

Problema 14 (OBM-U 2011 - Problema 5, 1a fase). *A função* $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *é contínua em* $[0,+\infty)$, *diferenciável em* $(0,+\infty)$ *e satisfaz:*

$$f(x+1)=\cos(f(x))$$

para todo $x\in[0,+\infty)$. *Sabemos que* $f(0)=0$ *e* $f'(2)=1$. *Mostre que existe um único número real* d *tal que o limite abaixo exista e pertence a* $(0,+\infty)$*:*

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^d}.$$

Determine os valores de d *e de* a.

Problema 15 (OBM-U 2010 - Problema 1, 1a fase). *Há muito tempo em uma galáxia muito distante, utilizavam-se como referência para viagens espaciais os pontos* A,B,C,D,E,F,G,H, *vrtices de um cubo de aresta igual a um ano-luz tendo os quadrados* $ABCD$ *e* $EFGH$ *como faces e tendo os segmentos* AE,BF,CG *e* DH *como arestas. Uma nave espacial viaja com velocidade constante em trajetória retilínea de* B *para* C. *Outra nave viaja com velocidade constante igual ao triplo da velocidade da primeira, em trajetória retilínea de* A *para* G. *Sabendo que a primeira atinge o ponto* C *no mesmo instante em que a segunda atinge o ponto* G, *determine a menor distância entre as naves durante esse deslocamento.*

Problema 16 (OBM-U 2010 - Problema 4, 1a fase). *Seja* n *um inteiro positivo.*

Seja A_n *o subconjunto do plano definido por* $1\leq x\leq n$, $0\leq y\leq \ln x$.

Seja B_n *o polígono convexo de vértices* $(1,0),(2,\ln 2),(3,\ln 3),\cdots,(n,\ln n),(n,0)$.

Seja $C_n=A_n-B_n$ *o complemento de* B_n *em relação a* A_n.

a) Calcule as áreas de A_n, B_n, C_n. *Simplifique sua resposta.*

b) Mostre que a área de C_n *é menor que* 1 *para qualquer inteiro positivo* n.

Problema 17 (OBM-U 2009 - Problema 1, 1a fase).

a) Encontre o valor mínimo da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $f(x)=e^{\frac{x}{e}}-x$.

b) Qual destes números é maior: e^π *ou* π^e*?*

Problema 18 (OBM-U 2009 - Problema 6, 1a fase). *Considere a sequência* $a_0, a_1, \cdots$ *definida por* $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{\pi}{3}$ *e, para* $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_n a_0)}{3(n+1)}$$

Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots .$$

Problema 19 (OBM-U 2008 - Problema 6, 1a fase). *Seja* $P_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi k}{n}\right)$. *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n P_{n+1}}{n}.$$

Problema 20 (OBM-U 2007 - Problema 2, 1a fase). *Dados números reais* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *não todos nulos, encontre o (menor) período da função*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{sen}(kx).$$

Problema 21 (OBM-U 2007 - Problema 6, 1a fase). *Seja* $y(t)$ *uma função real de variável real tal que* $y''(t) + e^{t^2} y'(t) + 3ty(t) = 2\operatorname{sen} t + \operatorname{tg} t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Calcule o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{ty'(t)}{y(t) - 1}.$$

Problema 22 (OBM-U 2006 - Problema 5, 1a fase). *As funções* $y_1(t) = (1 + t^2)e^{t^2}$, $y_2(t) = (t + t^2)e^{t^2}$ *e* $y_3(t) = (-1 - t + t^2)e^{t^2}$ *são soluções da equação diferencial* $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, *onde* $a(t), b(t), c(t)$ *são funções duas vezes diferenciáveis.*

Determine uma função $y(t)$ *duas vezes diferenciável tal que* $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 0$.

Problema 23 (OBM-U 2006 - Problema 3, 1a fase). *Dada* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *duas vezes diferenciável com* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *e* $1 + f(x) = \frac{1}{f''(x)}$ *para todo* $x \in [0, 1]$, *mostre que* $f(1) < \frac{3}{2}$.

Problema 24 (OBM-U 2006 - Problema 1, 1a fase). *Calcule a integral:* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x - x - 1}{(e^x - 1)x} dx.$

Problema 25 (OBM-U 2005 - Problema 2, 1a fase). *Calcule:* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx.$

Problema 26 (OBM-U 2004 - Problema 2, 1a fase). *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx.$

Problema 27 (OBM-U 2004 - Problema 6, 1a fase). *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

Problema 28 (OBM-U 2003 - Problema 4, 1a fase). *Sabemos que* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Defina* $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$. *Prove que existe um número real* $a > 0$ *tal que existe o limite:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(n) - \frac{\pi^2}{6} + \frac{a}{n} \right) \cdot n^2.$$

Calcule a *e este limite.*

Problema 29 (OBMU 2003 - Problema 6, 1a fase). *Defina* $a_1 = 3$ *e* $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. *Prove que* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln a_n}{n} = \ln 2$ *e calcule* $\lim_{n\to\infty}(\ln\ln a_n - n\ln 2)$.

Problema 30 (OBM-U 2002 - Problema 3, 1a fase). *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx.$

Problema 31 (OBM-U 2002 - Problema 1, 1a fase). *A função* $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e diferenciável. Sabe-se que* $f(0) = 0$, $f'(0) = a$ *e* $f(x+1) = e^{f(x)}$ *para todo* $x > -1$.

Calcule $f'(3)$.

Problema 32 (OBM-U 2001 - Problema 1, 1a fase). *Seja* $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$. *Calcule* $f^{(2001)}(0)$. *(Denotamos por* $f^{(n)}(x)$ *a derivada de ordem* n *no ponto* x*)*

Problema 33 (OBM-U 2001 - Problema 6, 1a fase). *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência de número reais definida por*

$$x_{n+1} = x_n^2 - \frac{x_n}{2} \quad , n \geq 0$$

Para quais valores de x_0 *a sequência converge? Para qual valor?*

1. Idéias

Derivadas:

[2006 - Problema 3] Estime (por cima e por baixo) a primeira e segunda derivada de $f(x)$, aplique fatos como o Teorema do Valor Médio e/ou o Teorema Fundamental do Cálculo.

[2009 - Problema 1] Derive e iguale a 0.

[2010 - Problema 1] Se $h(t)$ é o quadrado da distância entre as naves no instante t, derive e iguale a 0.

[2011 - Problema 5] Encontre alguns valores de f e de f', utilize polinômios de Taylor de sen e cos.

[2012 - Problema 1] Derive e iguale a 0.

[2012 - Problema 2] Derive $g(x) = \ln f(x)$.

[2014 - Problema 4] Use o Teorema do Valor Médio e que $|x - y| \geq 1/n(n-1)$ se $x, y \in D_n$.

[2015 - Problema 2] Escreva f_{n+1} em função de f_n, derive e deduza por indução.

[2016 - Problema 2] Seja $f(y)$ o tempo gasto por Sonic quando toca a parede no ponto $(0, y)$.

Simetria:

[2002 - Problema 3] Faça a mudança de variáveis $u = -x$.

[2004 - Problema 2] Faça a mudança de variáveis $u = -x$. (Esse truque pode funcionar bem se $f(x) + f(-x)$ for uma função que você sabe integrar).

[2005 - Problema 2] Faça a mudança de variáveis $u = \pi/4 - x$. (Esse truque pode funcionar bem se $f(x) + f(\pi/4 - x)$ for uma função que você sabe integrar).

[2006 - Problema 1] Faça a mudança de variáveis $u = -x$. (Esse truque pode funcionar bem se $f(x) + f(-x)$ for uma função que você sabe integrar).

Trigonometria:

[2001 - Problema 1] $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

[2007 - Problema 2] $\operatorname{sen}(Tx)$ tem período $\frac{2\pi}{T}$.

Sequências:

[2001 - Problema 6] Se $x_{n+1} = f(x_n)$, investigue para quais valores $f(x)$ é crescente, decrescente, etc. Utilize o Teorema da Sequência Monótona

[2003 - Problema 6] $a_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$.

Séries:

[2003 - Problema 4] Olhe para a região delimitada pelo gráfico de $1/x^2$ e pelos trapézios cuja área dão $f(n)$.

[2011 - Problema 1] Para cada $m \geq 0$ fixado, a soma em n se escreve como uma soma finita e uma série geométrica.

[2012 - Problema 6] Escreva essa área como uma séries dada pela diferença de duas séries que correspondem à áreas descritas. Compare essa série com alguma que você sabe ser convergente/divergente. O Teorema do Valor Médio e as equações das retas tangentes podem ser úteis.

Série de potências:

[2004 - Problema 6] Considere $f(x) = \sum \frac{x^{3k+3}}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$, descubra quem é $f'''(x)$ (ou $f''(x)$ ou $f'(x)$) e integre 3 vezes (ou 2 ou 1 vez).

[2007 - Problema 6] Escreva $\operatorname{sen} t$, $\operatorname{tg} t$, e^{t^2} e $y(t)$ como séries de potências.

[2009 - Problema 6] Defina $f(x) = \sum a_n x^n$ e olhe para a série de potências de $f(x)^2$.

Equações diferenciais:

[2006 - Problema 5] O conjunto de soluções desta equação forma um sub-espaço afim, encontre algum elemento desse sub-espaço que cumpra as condições pedidas.

[2014 - Problema 1] Se $x(t)$ é a distância que falta, escreva $x'(t)$ em função de $x(t)$ para determinar $x(t)$.

Integrais:

[2011 - Problema 2] Integrar em coordenadas cilindricas.

[2015 - Problema 3] A probabilidade pedida é igual a uma área que se calcula através de uma integral.

Outras:

[2007 - Problema 6] Complete quadrados e veja f como soma de duas distâncias de um mesmo ponto a outros 2 pontos que não dependem de t.

[2008 - Problema 6] Se $I_n = \int_0^\pi \operatorname{sen}^n x dx$, integre por partes para verificar que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$. Observe também que $P_n - 1 < \frac{n}{\pi} I_n < P_n + 1$.

[2010 - Problema 4] Essa fato pode ser usado para demonstrar a Fórmula de Stirling. Estude a demonstração de tal fórmula.