CONTAGENS DUPLAS

SAMUEL FEITOSA

Em um grande número de problemas de combinatória precisamos contar algum conjunto de pelo menos duas maneiras diferentes. Nosso propósito será estudar algumas formas de fazer tais contagens. O leitor deve PENSAR bastante em cada problema antes de ver a solução. As seções estão organizadas em ordem crescente de dificuldade, sendo a última bem mais avançada que as demais.

1 Grafos

Problema 1. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Solução Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Bem, facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada duas vezes. Logo o número obtido teria que ser par.

Será que cada casa estar ligada a exatamente 7 outras foi crucial? É possível revolvermos o problema anterior com um enunciado mais geral:

Problema 2. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Solução Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

Para professores. É recomendável que, na sala de aula, o professor tente primeiro introduzir as ideias envolvidas na contagem dupla anterior sem introduzir notação desnecessária, por exemplo, ao explicar o que é um grafo antes mesmo de resolver alguns problemas. Enunciados envolvendo objetos completamente diferentes, pessoas e casas como nos exemplos anteriores, podem ser úteis para levar o aluno a ituir que as ideias são mais gerais e abstratas.

Problema 3. Prove que numa festa com $2n$, pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

Solução Suponha que quaisquer duas pessoas tenham um número ímpar de amigos em comum e seja A um dos participantes da festa. Seja $M = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ o conjunto dos amigos de A. Considere uma nova festa restrita apenas ao conjunto M. Como cada F_i tem um número ímpar de amigos em comum com A, na nova festa, cada F_i possui um número ímpar de amigos. Pelo exemplo anterior, k deve ser par. O mesmo argumento vale para qualquer pessoa na festa e consequentemente todos conhecem um número par de pessoas. Peça para cada um dos amigos de A fazerem uma lista de seus amigos diferentes de A. A soma da quantidade de nomes listados é par, pois é uma soma de uma quantidade par (igual a k) de números ímpares (cada F_i possui um número ímpar de amigos diferentes de A). Agora comparemos o número de aparições de cada uma das $2n-1$ pessoas diferentes de A nessas listas. Se cada uma delas aparecer em um número ímpar de listas, a soma total de todos os nomes em todas as listas seria ímpar (Lembre-se que a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar!). Mas isso é uma contradição. Logo, existem duas pessoas na festa com um número par de amigos em comum.

Problema 4. (Lema de Sperner) Um triângulo é dividido em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum, ou têm um lado (completo) em comum. Os vértices do triângulo maior são numerados: $1, 2, 3$. Os vértices dos triângulos menores também são numerados: $1, 2$ ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre o lado do triângulo maior oposto ao vértice i ($i = 1, 2, 3$) não podem receber o número i (veja a figura). Mostre que entre os triângulos menores existe um cujos vértices são numerados $1, 2, 3$.

(Colocar Figura)

Solução Uma boa estratégia seria pensar numa versão particular do problema. Olhando para o bordo do triângulo, temos uma situação semelhante ao problema inicial com uma dimensão e uma cor a menos. Consideremos, por exemplo, o lado dos vértices 1 e 2, poderíamos provar que dentre os segmentos da divisão deste lado, sempre existe um número ímpar de segmentos com as cores 1 e 2. Imagine uma pessoa com uma bandeira abaixada no vértice 1 caminhando em direção ao vértice 2. Ao passar por um vértice vermelho, a pessoa deve levantar a bandeira e ao passar por um vértice branco a pessoa deve abaixar a bandeira. Ao final do trajeto, a bandeira estará abaixada e consequentemente a pessoa terá realizado um número ímpar de movimentos de abaixar e levantar a bandeira. Mas cada movimento de abaixar ou levantar a bandeira corresponde a um segmento com as cores 1 e 2. Outro modo de ver isso, é perceber que a adição de um vertice de qualquer uma das duas cores, não altera a paridade da quantidade de segmentos com vértices de cores diferentes. Agora tentemos usar essa informação para resolver o problema. Contaremos o número de segmentos $\overline{12}$ (com algumas repetições). Eles aparecem nos triângulos de vértices $\overline{123}, \overline{122}$ e $\overline{112}$. Digamos que há x triângulos $\overline{123}$, y triângulos $\overline{122}$ e z triângulos $\overline{112}$. Observe que os segmentos internos ao triângulo grande são contados duas vezes (eles são comuns a dois triângulos) e os segmentos do lado do triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{12}$ aparecem duas vezes nos triângulos $\overline{122}$ e $\overline{112}$ e uma vez nos triângulos $\overline{123}$. Assim,

$$\begin{aligned} 2 \times \text{segmentos interiores } \overline{12} + \text{segmentos nos lados } \overline{12} &= \\ \text{número de segmentos } \overline{12} &= x + 2y + 2z. \end{aligned}$$

Como existe uma quantidade ímpar de segmentos nos lados, concluímos que x é ímpar.

Exercícios Propostos

1. Em uma festa com 23 pessoas, é possível que cada um possua 1, 3 ou 5 amigos na festa?
2. É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?
3. Existem 1000 cidades em Brazilândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Brazilândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

2 Identidades Binomiais

Uma excelente maneira de valorizar o significado de um número binomial é, logo após defini-lo, estudar propriedades deste objeto sem necessariamente calculá-lo explicitamente. Façamos o mesmo aqui: O número de maneiras de selecionarmos um subconjunto de r elementos distintos de um conjunto de n elementos distintos, onde a ordem da seleção não importa, é denotado por $\binom{n}{r}$.

Problema 5. Prove as seguintes afirmações:

1. (Relação de Stifel) $\dbinom{n}{r} + \dbinom{n}{r+1} = \dbinom{n+1}{r+1}$.
2. $\dbinom{2n+2}{n+1} = \dbinom{2n}{n+1} + 2\dbinom{2n}{n} + \dbinom{2n}{n-1}$.

Solução

1. O lado direito conta o número de maneiras de escolhermos $r+1$ pessoas em um grupo de $n+1$. Podemos dividir essas escolhas em dois grupos: aquelas que contém um certo indivíduo ($\binom{n}{r}$) e aquelas que não o contém ($\binom{n}{r+1}$).
2. O lado esquerdo conta o número de maneiras de escolhermos $n+1$ pessoas no grupo da $2n+2$ pessoas que estão comemorando o aniversário da Ana e do joão. Essas escolhas se dividem em três grupos, aquelas que não contém Ana e João ($\binom{2n}{n+1}$), aquelas que contém apenas um dos dois ($2\binom{2n}{n}$) e aquelas que contém ambos ($\binom{2n}{n-1}$).

Problema 6. (Teorema das Colunas) Mostre que:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Solução Suponha que exista uma fila de $n+1+k$ pessoas. As primeiras $k+1$ pessoas são $c_0, c_1, \ldots, c_k$ e estão ordenadas pelas suas alturas. O lado direito conta o número de maneiras de escolhermos $n+1$ pessoas nesse grupo. Certamente precisaremos escolher alguém do conjunto $\{c_0, c_1, \ldots, c_k\} = C$. Seja C_i o conjunto das escolhas em que o menor elemento de C escolhido é c_i. Qualquer escolha faz parte de algum desses C_i's. Para calcular o número de elementos de C_i, veja que c_i deve fazer parte dessa escolha e os outros n elementos devem ser escolhidos dentre os elementos posteriores a c_i, i.e., temos $n+k+1-i$ candidatos. Logo,

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} |C_i| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n}.$$

Problema 7. Mostre que: $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$

Solução Vamos contar o número de maneiras de escolhermos algumas crianças para passearem e, além disso, uma delas para ganhar um sorvete. Como a criança que ganhará o sorvete certamente estará no passeio, podemos começar escolhendo-a. Podemos fazer isso de n maneiras. Das crianças que restaram, devemos escolher algum subconjunto para acompanhar a primeira criança, podemos fazer isso de 2^{n-1} maneiras, isso nos dá o lado direito. Por outro lado, para cada $k \geq 1$, podemos escolher k crianças ($\binom{n}{k}$) e, posteriormente, podemos escolher uma delas para ganhar o sorvete de k maneiras. A soma sobre todos os k, contará todos os conjuntos.

Problema 8. (Putnam 1962) Mostre que:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Solução Vamos construir uma situação semelhante ao problema anterior, sendo que agora seremos mais bondosos, além de escolher uma criança para ganhar um sorvete também escolheremos uma criança para ganhar um caramelo (a criança pode ser a mesma). O lado esquerdo conta essas escolhas como no problema anterior. Agora queremos contar o número de maneiras de primeiro escolhermos as crianças que vão receber as guloseimas e depois aquelas que irão acompanhá-las. Se essas duas crianças são diferentes, temos $n(n-1)2^{n-2}$ escolhas. Se essas crianças são iguais, temos $n2^{n-1}$ escolhas. Agora basta ver que:

$$n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercícios Propostos

1. Prove as seguntes identidades utilizando argumentos de contagens duplas:
   (a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n} = 2^n$
   (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
   (c) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
   (d) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ e com isso conclua que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
   (e) (Identidade de Vandermonde) $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$.
2. Considere a sequência de Fibonacci definida por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Prove que:
   (a) O número de maneiras de cobrirmos um tabuleiro $2 \times n$, sem sobreposição, com peças 1×2 é F_{n+1}.
   (b) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
   (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+1}$.
3. Definimos por D_n o número de permutações de $\{1, 2 \ldots, n\}$ sem pontos fixos (um elemento i é um ponto fixo quando ele ocupa a posição i na permutação). Usando o princípio da inclusão-exclusão podemos obter:

   $$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

   Mostre que:

   $$n! = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} D_{n-r}.$$

4. Encontre uma fórmula fechada para a soma

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

5. Seja n um inteiro não negativo. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

3 Tabuleiros

Se o que queremos contar está de alguma forma associado à números escritos em um tabuleiro, temos uma contagem dupla extremamente natural: a soma dos números escritos nas linhas é igual à soma dos números escritos nas colunas.

Problema 9. (Olimpíada Russa) Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática. A prova possuia 6 problemas. Sabemos que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois participantes de modo que para qualquer problema, pelo menos um deles dois conseguiu uma solução correta.

Solução Façamos um tabuleiro 200×6 representando o resultado dos estudantes. Cada linha representará um estudante e cada problema resolvido pelo estudante i será marcado com o número 1 na tabela. Caso o problema não tenha sido resolvido, marcaremos o número zero. Pensemos inicialmente em casos extremais. O que acontece se um estudante resolveu os seis problemas? Basta escolhermos um estudante qualquer e a dupla desejada estará formada. Se um estudante resolveu 5 problemas, também podemos obter facilmente nossa dupla. E se um estudante tiver resolvido exatamente 4 problemas? Suponha, sem perda de generalidade, que ele não resolveu os problemas 5 e 6. Sabemos que pelo menos 120 pessoas resolveram o problema 5. Se nenhuma delas tiver resolvido o problema 6, saberemos que no máximo 80 pessoas o resolveram. Mas isso contradiz o enunciado e assim temos certeza que pelo menos uma pessoa resolveu ambos os problemas. Resta mostrar que esse tipo de situação sempre acontece, i.e., existe alguém que resolveu pelo menos 4 problemas. Agora usaremos a contagem dupla. A soma dos número das colunas é pelo menos $6 \times 120 = 720$. Como existem 200 linhas, pelo menos uma delas terá soma $\frac{720}{200} > 3$, ou seja, pelo menos uma linha terá 4 números 1's.

A estratégia do problema anterior foi associar uma matriz com entradas em $\{0, 1\}$ que codificasse o enunciado e realizar as duas somas possíveis no número de uns: pelas linhas e pelas colunas. Outra estratégia importante é contar pares de números de uns ou zeros em uma mesma linha ou coluna. Vejamos uma nova solução para o problema anterior usando essa ideia.

Solução Suponha que a afirmação é falsa, i.e., para cada par de estudantes, existe pelo menos um problema que não foi resolvido por eles. Façamos uma matriz 200×6 como anteriormente. Para cada par de linhas j e k, cole uma etiqueta E_{jk} ao problema i se ele não foi resolvido pelos estudantes correspondentes. Contemos o número de etiquetas utilizadas. Para cada par de linhas, devemos usar pelo menos uma etiqueta, logo o número mínimo de etiquetas é $\binom{200}{2}$. Como cada problema foi resolvido por pelo menos 120 estudantes, os seis problemas podem receber no máximo $6 \cdot \binom{80}{2}$ etiquetas. Como $\binom{200}{2} < 6 \cdot \binom{80}{2}$, temos um absurdo.

Problema 10. (Olimpíada Russa) Bruno pintou k casas de um tabuleiro $n \times n$ de preto. Ele observou que não existiam quatro casas pretas formando um um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro. Mostre que:

$$k \le n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

Solução Ao pintar duas casas pretas em uma mesma linha, Bruno cria um empedimento para sua pintura: não poderá pintar outras duas casas pretas nessas colunas. Comecemos contando esses empedimentos. Denotemos por a_i o número de casas pintadas na linha i, então $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Para cada par de casas pintadas na linha i, associemos uma etiqueta E_{jk} se essas casas estão nas colunas j e k. O número de etiquetas utilizadas é

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2},$$

pois em cada linha temos $\binom{a_i}{2}$ pares de quadrados pintados. Como não podemos repetir etiquetas, pois assim formaríamos um quadrado, o número máximo de etiquetas utilizadas é $\binom{n}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2} &\leq \binom{n}{2}\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-a_i}{2} &\leq \frac{n^2-n}{2}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy, $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)n \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = k^2$, consequentemente,

$$\frac{k^2}{2n}-\frac{k}{2n} \leq \frac{n^2-n}{2}$$

Estudando o sinal da inequação do segundo grau em k, obtemos que,

$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

Problema 11. (IMO 1998/2) Num concurso, há a candidatos e b juízes, onde $b \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo passar ou não. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

Solução Façamos um tabuleiro $a \times b$ onde as linhas representam os candidatos e as colunas os juízes. Na interseção de uma linha e coluna, colocaremos um número 1 caso aquele juíz tenha aprovado aquele estudante e o número 0 caso contrário. Se os juízes das colunas i e j concordam com o julgamento do aluno da coluna k, pregamos uma etiqueta E_{ij} nesse aluno. Calculemos o número de etiquetas pregadas de duas maneiras. Primeiramente, para cada par de colunas, sabemos que existem no máximo k etiquetas associadas. Logo, o número de etiquetas usadas é menor ou igual à $\binom{b}{2}k$. Para contar esse número usando as linhas, denotaremos por a_i o número de zeros na linha i. Assim, para cada linha, temos exatamente $\binom{a_i}{2}+\binom{b-a_i}{2}$. As duas contagens resultam em:

$$\sum_{i=0}^{a}\left(\binom{a_i}{2}+\binom{b-a_i}{2}\right) \leq k\binom{b}{2}$$

Agora vamos fazer outra contagem dupla para estimar o termo $\left(\binom{a_i}{2}+\binom{b-a_i}{2}\right)$. O que ele conta? Conta o número de maneira de escolhermos duas pessoas do mesmo sexo em um grupo de a_i homens e $b-a_i$ mulheres. Esse número também pode ser calculado contando o número escolhas de duas pessoas quaisquer ($\binom{b}{2}$) retirando-se aquelas escolhas mistas ($a_i(b-a_i)$). Como b é impar,

$$\begin{aligned}1 &\leq (b-2a_i)^2\\ 1+4a_i(b-a_i) &\leq b^2\\ a_i(b-a_i) &\leq \frac{b^2-1}{4}\end{aligned}$$

Substituindo na primeira desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a}\left(\binom{b}{2}-\frac{b^2-1}{4}\right) &\leq k\binom{b}{2}\\ a\frac{b(b-1)}{2}-a\frac{(b-1)(b+1)}{4} &\leq k\frac{b(b-1)}{2}\\ ab-\frac{b+1}{2} &\leq kb\\ \frac{b-1}{2b} &\leq \frac{k}{a}\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

1. (Olimpíada Russa) Com os dígitos 1 e 2 formamos 5 números de n dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente m casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

2. Em um certo comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê possui exatamente três membros. Prove que o número de membros é igual ao número de subcomitês.

3. (Olimpíada Balcânica 1997) Sejam m e n inteiros maiores que 1. Seja S um conjunto com n elementos, e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ suconjuntos de S. Assuma que para quaisquer dois elementos x e y em S, existe um conjunto A_i tal que ou x está em A_i e y não está em A_i ou x não está em A_i e y está em A_i. Prove que $n \leq 2^m$.

4. (Olimpíada Romena 2003) Um inteiro n, $n \geq 2$, é bonito se existe uma família de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que:

   (1) $i \notin A_i$ para todo i.

   (2) $i \in A_j$ se e somente se $j \notin A_i$, para índices distintos i e j.

   (3) $A_i \cap A_j$ é não vazio para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   Prove que:

   a) 7 é bonito.

   b) n é bonito se e somente se $n \geq 7$.

4 Comitês e Conjuntos

O caso mais comum para usarmos contagens duplas é quando o conjunto que queremos contar possui uma estrutura de porduto $A \times B$, pois nesse caso:

$$\sum_{a \in A} |(a, B)| \quad = \quad \sum_{b \in B} |(A, b)|$$

Nessa seção, trataremos de alguns exemplos onde esta estruturua não está tão evidente no problema.

Problema 12.

[1] Há n tipos de doce na loja do Zé. Um dia, m amigos se juntam para comprarem k doces diferentes cada um. Cada tipo de doce é comprado por r dos amigos. Cada par de tipo de doces é escolhido por t amigos. Prove que:

(i) $mk = nr$;

(ii) $r(k-1) = t(n-1)$.

Solução O número de doces levados da loja é mk. Como cada doce é levado por r amigos, esse número também é nr. Quantos pares de doces são levados? Pela última informação do enunciado, esse número é $t\binom{r}{2}$. Por outro lado, cada amigo leva $\binom{k}{2}$ pares de doces, logo:

$$\begin{aligned} t\binom{r}{2} &= m\binom{k}{2} \\ t\frac{r(r-1)}{2} &= m\frac{k(k-1)}{2} \\ t\frac{r(r-1)}{2} &= \frac{nr(k-1)}{2} \\ r(k-1) &= t(n-1) \end{aligned}$$

Problema 13. [2]Seja X um conjunto com n elementos ($n \geq 1$). Suponha que $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ é uma família de subconjuntos de X com a propriedade que

$$|A_i \cap A_j| = 1,$$

para todos $i \neq j$. Mostre que $m \leq n$.

Solução Suponhamos inicialmente que $m \geq 2$ (Quando $m < 2$ o problema é trivial). Além disso, suponhamos que nenhum A_i é vazio ou igual ao conjunto todo. Iremos nos concentrar nos pares (x, A) onde $x \notin A$. Suponha que o elemento x pertence exatamente aos $d(x)$ conjuntos: $\{A_1, A_2, \ldots, A_{d(x)}\}$. Como $|A \cap A_i| = 1$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, d(x)\}$, deve existir um $x_i \neq x$

[1]Você poderá encontrar mais exemplos como esse estudando Block designs.

[2]Este problema é um caso particular da desigualdade de Fischer. Uma solução elementar para este problema pode ser encontrada usando Álgebra Linear

tal que $x_i \in A \cap A_i$. Além disso, se $i \neq j$, $x_i \neq x_j$ e consequentemente $|A| \geq d(x)$. Se $m > n$, $m - d(x) > n - d(x) \geq n - |A|$ e portanto,

$$\frac{d(x)}{m - d(x)} < \frac{|A|}{n - |A|}.$$

Para cada tal par (x, A), some o número $\dfrac{|A|}{n - |A|}$. Qual números iremos obter? Fixado A, existem $n - |A|$ possíveis valores de x, logo:

$$\sum_{(x,A)} \frac{|A|}{n - |A|} = \sum_{A} \frac{(n - |A|)|A|}{n - |A|} = \sum_{A} |A|.$$

Fixado x, existem $m - d(x)$ possibilidade para A, portanto, a soma anterior deve ser maior que

$$\sum_{(x,A)} \frac{d(x)}{m - d(x)} = \sum_{x} \frac{(m - d(x)d(x))}{m - d(x)} = \sum_{x} d(x).$$

Assim obtivemos um absurdo pois $\sum_A |A| = \sum_x d(x)$ (estamos contando os elementos que foram usados nos conjuntos de duas formas). Os casos em que algum dos A_i's é igual ao conjunto todo ou o conjunto vazio é deixado para o leitor.

Problema 14. (Banco IMO 2004) Existem n estudantes em uma universidade, n inteiro ímpar. Alguns estudantes se reunem em clubes (um estudante pode pertencer a clubes diferentes). Alguns clubes se reunem para formar algumas sociedades(um clube pode pertencer a diferentes sociedades). Existem k sociedades. Suponham que aconteçam as seguintes condições:

i) cada par de estudantes está em exatamente um clube.

ii) para cada estudante e cada sociedade, o estudante está em exatamente um clube da sociedade,

iii) cada clube tem um número ímpar de estudantes e, além disso, um clube com $2m + 1$ estudantes ($m > 0$) está em exatamente m sociedades.

Encontre todos os valores possíveis de k.

Solução Vamos contar o número de triplas (e, C, S) onde e é um estudante, C é um clube e S é uma sociedade. Fixados e e S, existe apenas uma possibilidade para C, assim, em nossa primeira contagem obtivemos nk tais triplas. Fixado uma comissão C, temos $\dfrac{|C| - 1}{2}$ possibilidades para S, e uma vez que escolhemos C e S, temos $|C|$ possibilidades para e(ele deve ser um estudante em C). Assim, o número de tais triplas é

$$\begin{aligned} nk &= \sum_{C} \frac{|C|(|C| - 1)}{2} \\ &= \text{total de pares de estudantes nos clubes} \\ &= \binom{n}{2} \end{aligned}$$

E consequentemente, $k = \dfrac{n - 1}{2}$. Um exemplo onde este valor é atigindo é considerando apenas um clube com todos os estudantes e k sociedades iguais formadas por esse único clube.

Exercícios Propostos

1. Nove cientistas trabalham em um projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abrí-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

   (i) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

   (ii) Na situação do item (i), quantas chaves cada cientista deve ter?

2. (Olimpíada Russa)

   (i) Uma comissão se reuniu 40 vezes. Em cada reunião estiveram presentes 10 pessoas de tal maneira que quaisquer dois dos membros da comissão não estiveram juntos em mais de uma oportunidade. Demonstre que a quantidade de membros da comissão é maior que 60.

   (ii) Demonstre que com 25 pessoas não se pode formar mais que 30 comissões de 5 pessoas cada uma de modo que não existam duas comissões que tenham mais de um membro em comum.

3. (OBM,1992/8) Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo empate, cada jogador ganhou $\frac{1}{2}$ ponto; caso contrário, o vencedor ganhou 1 ponto e o perdedor 0 pontos. Participaram homens e mulheres e cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres. Mostre que o número de participantes é um quadrado perfeito.

5 Problemas Suplementares

Os problemas desta seção exigem mais engenhosidade.

Teorema 1. (Erdos-Ko-Rado) Seja X um conjunto com n elementos e $F = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ uma família de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes condições

1. $|A_i| = k \leq \frac{n}{2}$ para todo i.
2. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todos i e j distintos.

Então $p \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Prova. Comecemos com um lema que aparentemente não apresenta nenhuma conexão com o problema:

Lema. Considere um círculo C dividido por n pontos. Um arco de tamanho k consiste de $k+1$ pontos consecutivos e k arestas entre eles. Seja $n \geq 2k$, e suponha que existem t arcos distintos $A_1, A_2, \dots, A_t$, todos de tamanho k, tais que quaisquer dois arcos possuem uma aresta em comum. Então $t \leq k$.

A prova do lema será deixada como exercício para o leitor. Seja F uma família como no enunciado do teorema. Cada permutação cíclica dos elementos de X corresponde a uma divisão em pontos e arcos, onde cada elemento do conjunto está entre dois pontos. Cada conjunto de k elementos pode ser visto como um arco de tamanho k formando por elementos justapostos (em uma ordem qualquer). Para cada tal permutação, podemos calcular quantos arcos de tamanho k correspondem a conjuntos da família. Pelo lema, esse número é menor ou igual à k. Como existem $(n-1)!$ permutações, a quantidade máxima de conjuntos que podem ser encontrados nessas permutações é $k(n-1)!$. Certamente nessa contagem, alguns conjuntos foram contados várias vezes. É agora que usaremos uma contagem dupla. Fixado um conjunto A, seus elementos podem estar arranjandos para formarem um arco de tamanho k de $k!$ maneiras. Os outros elementos do conjunto podem ser permutados nas posições que restaram de $(n-k)!$ maneiras. Ou seja, cada conjunto é contado exatamente $k!(n-k)!$ vezes. Como existem p conjuntos, temos:

$$\begin{aligned} pk!(n-k)! &\leq k(n-1)!; \\ p &\leq \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Problema 15. (Olimpíada do Leningrado 1987) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_s$ uma família de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ tais que $|A_i| = a_i$. Sabemos que nenhum desses subconjuntos contém outro subconjunto da família. Prove que

$$\binom{n}{a_1}^{-1} + \binom{n}{a_2}^{-1} + \dots + \binom{n}{a_s}^{-1} \leq 1$$

Problema 16. (IMO 2005) Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de 2/5 dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

Problema 17. Alguns asteriscos estão escritos nas casas de um tabuleiro $m \times n (m < n)$, de modo que existe pelo menos um asterisco em cada coluna. Mostre que que existe um asterisco A tal que $l_A > c_A$, onde l_a e c_A denotam as quantidade de asteriscos na linha e coluna de A, respectivamente.

Problema 18. (Olimpíada Iberoamericana 2001) Sejam S um conjunto de n elementos e $S_1, S_2, \dots, S_k$ subconjuntos de $S (k \geq 2)$, tais que cada um deles têm pelo menos r elementos. Demonstre que existem i e j, com $i \neq j$, tais que a quantidade de elementos em comum entre S_i e S_j é maior ou igual à $r - \frac{nk}{4(k-1)}$.

Problema 19. (IMO 1989) Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que

1. não haja três pontos de S que sejam colineares;
2. para qualquer ponto P de S, há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P.

Prove que $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.

Problema 20. (IMO 1987) [3] Seja $p_n(k)$ o total de permutações do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que contêm exatamente k pontos fixos. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

Observação: uma *permutação* f de um conjunto S é uma função bijetora de S em S; um elemento i de S é chamado *ponto fixo da permutação* f se $f(i) = i$.

[3] O enunciado mais geral desse problema é o seguinte: Seja G um grupo finito agindo sobre um conjuno M. Sejam k o número de órbitas em que M é dividido por esta ação e $Fix(g)$, $g \in G$, o número de pontos fixos de g. Então:

$$\sum_{g \in G} Fix(g) = k \cdot |G|.$$

Esse é o lema de Burnside.