UMA DEMONSTRAÇÃO CURTA DO TEOREMA ERGÓDICO DE BIRKHOFF

RICARDO BORTOLOTTI

1. O Teorema Ergódico de Birkhoff

Considere $T : X \to X$ e $A \subset X$. Definimos $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Estamos interessados em estudar o limite das médias

$$\phi_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^n(x)). \tag{1}$$

Denotamos

$$\phi^-(x) := \liminf \phi_n(x) \quad \text{e} \quad \phi^+(x) := \limsup \phi_n(x). \tag{2}$$

Um dos objetivos fundamentais da Teoria Ergódica é estudar as médias definidas acima. Em particular, estamos interessados em saber quando o limite existe, i.e., $\phi^-(x) = \phi^+(x)$.

A hipótese fundamental para garantirmos a existência do limite é que a transformação T admita uma medida invariante μ. Caso isso aconteça, o Teorema Ergódico de Birkhoff garante a existência do limite em μ-quase todo ponto.

De agora em diante, vamos considerar $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, A um conjunto mensurável e T uma transformação mensurável. Dizemos que μ é uma **medida invariante** para T se

$$\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E) \quad \text{para todo } E \subset X \text{ mensurável.} \tag{3}$$

O teorema fundamental da Teoria Ergódica é o seguinte:

Teorema 1 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Se μ é uma medida invariante para T, então o limite*

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \tag{4}$$

existe para μ-quase todo ponto $x \in X$ e $\int \tilde{\phi}\, d\mu = \mu(A)$.

Observação. Uma vez que o teorema acima seja demonstrado, é fácil ver que se $h \in L^1(\mu)$ então as médias da forma $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} h(T^j(x))$ convergem em μ-qtp x para alguma $\tilde{h}$ e $\int \tilde{h}\, d\mu = \int h\, d\mu$.

2. Demonstração

Recordamos duas propriedades básicas sobre as médias ϕ_n, ϕ^- e ϕ^+.

Lema 1. *A função ϕ^+ é invariante, isto é, $\phi^+(T(x)) = \phi^+(x)$ para todo $x \in X$. O mesmo vale para ϕ^-.*

Demonstração: Note que

$$\phi_n(T(x)) = \phi_n(x) + \frac{\chi_A(T^n(x)) - \chi_A(x)}{n}$$

e tome o lim sup e o lim inf. $\square$

Lema 2. *Se μ é uma medida invariante, então* $\displaystyle\int \phi_n d\mu = \mu(A)$.

Demonstração: Note que $\chi_A(T(x)) = \chi_{T^{-j}(A)}(x)$, logo

$$\int \phi_n d\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A)) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(A) = \mu(A).$$

□

Demonstração do Teorema 1. Como $\phi^-(x) \leq \phi^+(x)$, basta demonstrar que $\int \phi^- d\mu = \mu(A) = \int \phi^+ d\mu$, pois daí segue que ϕ^- e ϕ^+ são iguais em μ-quase todo ponto.

Vamos considerar um conjunto A^* bem comportado em termo de médias, no sentido de que as médias de visitas a A^* estejam perto do $\limsup$ para todo n grande. Dado $\epsilon > 0$, para cada x considere $N = N(x)$ o menor inteiro N tal que

$$\phi_N(x) \geq \phi^+(x) - \epsilon \quad \text{(i.e., } \phi_N \text{ está } \epsilon\text{-perto do } \limsup). \tag{5}$$

Note que se $x \in A$ então $\psi_1(x) = 1 \geq \phi^*(x)$, logo $N(x) = 1$. Considere $A_M = \{x \notin A, N(x) > M\}$ e fixe M suficientemente grande tal que $\mu(A_M) < \epsilon$.

Definimos

$$A^* = A \cup A_M. \tag{6}$$

Considere $\psi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{A^*}(T^j(x))$ a média de visitas a A^* e $N^*(x)$ o menor inteiro N tal que

$$\psi_N(x) \geq \phi^+(x) - \epsilon. \tag{7}$$

Como $\chi_A \leq \chi_{A^*}$, segue que $\phi_n \leq \psi_n$. Portanto temos $N^*(x) = 1$ se $x \in A^*$ e, por construção, $N^*(x) \leq M$ se $x \notin A^*$.

Afirmamos que $\psi_n(x) \geq \phi^+(x) - 2\epsilon$ para todo $n \geq M\epsilon^{-1}$. De fato, podemos quebrar a soma no numerador de ψ_n em pedaços de comprimento no máximo M e comparar cada pedaço com ϕ^+. Tomando os inteiros $N_{j+1} = N^*(T^{N_1+\cdots+N_j}(x))$ e r_0 o maior inteiro tal que $N_1 + \cdots + N_{r_0} \leq n$, temos:

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &\geq \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r_0}\sum_{j=0}^{N_r-1} \chi_{A^*}(T^j(T^{N_1+\cdots+N_{r-1}}(x))) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r_0}\sum_{j=0}^{N_r-1} N_r\psi_{N_r}(T^{N_1+\cdots+N_{r-1}}(x)) \\
&\geq \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r_0} N_r \cdot (\phi^+(T^{N_1+\cdots+N_{r-1}}(x)) - \epsilon) \\
&= \phi^+(x) - \frac{n - (N_1 + \cdots + N_{r_0})}{n}(\phi^+(x) - \epsilon) \geq \phi^*(x) - 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Acima foi usado que $\phi^*(T^r(x)) = \phi^*(x)$ e que $n - (N_1 + \cdots N_{r_0}) \leq M \leq n\epsilon$.

Agora integramos:

$$\int \phi^+ d\mu - 2\epsilon \leq \int \psi_n d\mu = \mu(A^*) \leq \mu(A) + \epsilon \tag{8}$$

e fazemos $\epsilon \to 0$:

$$\int \phi^+ d\mu \leq \mu(A). \tag{9}$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos a desigualdade para o $\liminf$ com o outro sinal:

$$\int \phi^- d\mu \geq \mu(A). \tag{10}$$

Isso implica que ambas integrais são iguais a $\mu(A)$.

□