Universidade Federal de Pernambuco
Exame Final de Cálculo 3
11 de Julho de 2016
Aluno: **Turma:**

É proibido o porte de celular. Justifique suas respostas.

1ª) **(2,0)** Dado o campo vetorial $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{z}{x^2+z^2}, 2y, \dfrac{-2x}{x^2+z^2}\right)$.

a) (1,2) Encontre o trabalho realizado pelo campo sobre uma partícula que se desloca dando uma volta completa sobre a circunferência centrada em $(0, 1, 0)$ de raio 3 e contida no plano $y = 1$ no sentido anti-horário quando visto de cima.

b) (0,8) O campo $\overrightarrow{F}$, com domínio no complementar do eixo y, é conservativo?

Solução:

a) A trajetória C é parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (3\operatorname{sen} t, 1, 3\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Portanto: $W = \displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\cos t}{9}, 2, \frac{-6\operatorname{sen} t}{9}\right) \cdot (3\cos t, 0, -3\operatorname{sen} t)dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1 + \operatorname{sen}^2 t dt = 2\pi + \pi = 3\pi$

Resposta: 3π

b) Não, pois os campos conservativos tem a propriedade de que o trabalho realizado sobre qualquer trajetória fechada é nulo, o que não acontece com a trajetória descrita no item anterior.

Resposta: Não é conservativo.

$2^{\underline{a}}$) **(2,5)** Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y,0,0)$ e S o pedaço da superfície $x^2+y^2+z^2 = 2$ que satisfaz $x^2+y^2 \leq 1$ e $z \geq 0$, orientada pela normal com componente $z \geq 0$.

a) (1,0) Dê uma parametrização da superfície S e uma da curva ∂S, e faça um esboço mostrando a orientação positiva da fronteira ∂S através do vetor normal de S.

b) (1,5) Calcule $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$.

Solução:

a) Como $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$, vemos que em S a coordenada z satisfaz $1 \leq z \leq 2$. Olhando para as coordenada cilindricas, se a coordenada z na esfera de raio $\sqrt{2}$ varia entre 1 e 2, então $\cos\phi$ varia entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 1, portanto $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$.

$S: \overrightarrow{r}_1(u,v) = (\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\cos\phi)$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A fronteira ∂S é uma circunferência de raio 1, centrada em $(0,0,1)$ e contida no plano $z=1$, portanto é parametrizada por: $\overrightarrow{r}_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$.

Obs: Falta o esboço, colocarei em breve. A imagem do triângulo retângulo ajuda a ver que $0 \leq \operatorname{sen}\phi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e que o raio de ∂S é igual a 1.

Resposta: $S: \overrightarrow{r}_1(u,v) = (\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\cos\phi)$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\partial S: \overrightarrow{r}_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) Pelo Teorema de Stokes: $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}_2 =$

$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, 0, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t dt = -\pi$

Resposta: $-\pi$

$3^{\underline{a}}$) **(2,5)** Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(z^2x, \frac{y^3}{3} + \operatorname{tg} z, x^2z + y^2\right)$$

através do hemisfério superior da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientado para cima.

Solução: O hemisfério superior não é uma superfície fechada, portanto não podemos aplicar o Teorema de Gauss diretamente. Para calcularmos, vamos considerar:

S: o hemisfério superior da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientado para cima

D: o disco contido no plano $z = 0$ dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ orientado para baixo

E: a superfície fechada $E = S \cup D$. (E está orientada para fora)

Pelo Teorema de Gauss: $\iiint\limits_E \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = \iint\limits_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} + \iint\limits_D \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$.

O valor que buscamos é $\iint\limits_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$. Calculemos as outras duas integrais acima:

$\iiint\limits_E \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = \iiint\limits_E (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$ $\Big($mudando para coordenadas esféricas, notando que $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ $\Big)$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2(\rho^2 \operatorname{sen} \phi) d\rho d\theta d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \phi \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho = [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi \cdot [\frac{\rho^5}{5}]_0^1 = 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}$

Parametrizando D respeitando a orientação para baixo:

$\overrightarrow{r}(u,v) = (u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{r}_u = (\operatorname{sen} v, \cos v, 0)$, $\overrightarrow{r}_v = (u \cos v, -u \operatorname{sen} v, 0)$, $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (0, 0, -u)$

($\overrightarrow{r}$ respeita a orientação para baixo porque a coordenada z de $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ é negativa)

$\iint\limits_D \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(0^2 u \operatorname{sen} v, \frac{(-u \operatorname{sen} v)^3}{3} + \operatorname{tg} 0, (u \cos v)^2 \cdot 0 + (-u \operatorname{sen} v)^2\right) \cdot (0, 0, -u) dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -u^3 \operatorname{sen}^2 v dudv = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 v dv \cdot \int_0^1 -u^3 du = \pi \cdot [\frac{-u^4}{4}]_0^1 = \pi \cdot \frac{-1}{4} = \frac{-\pi}{4}$

Portanto: $\iint\limits_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \iiint\limits_E \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV - \iint\limits_D \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi + 5\pi}{20} = \frac{13\pi}{20}$

Resposta: $\frac{13\pi}{20}$

$4^{\underline{a}}$) **(3,0)** Determine, em cada item, se a série é convergente ou divergente. Especifique quais os testes utilizados.

a) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{n}+10)}{n}$

c) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7e^n+\ln n}{1+3^n+n^2}$

Solução:

a) Se $a_n = 2n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pelo Teste da Divergência: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2\cdot 1 = 2$. Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, a série é divergente.

Resposta: A série é divergente.

b) Trata-se de uma série alternada, vamos verificar que é possível aplicar o Teste de Leibniz: $a_n = \frac{\sqrt{n}+10}{n}$ é uma sequência positiva, $\displaystyle\lim_{n\to 0^+} a_n = \lim_{n\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{10}{n} = 0$.

Verifiquemos que $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}+10}{x}$ é descrescente para $x > 0$ pela derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot x - x^{\frac{1}{2}}\cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}}{x^2} = -\frac{x^{\frac{1}{2}-2}}{2} = -\frac{x^{\frac{-3}{2}}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} < 0$$

Pelo Teste de Leibniz concluimos que a série converge.

Resposta: A série é convergente.

c) Pelo Teste da Comparação, $a_n = \frac{n^7e^n+\ln n}{1+3^n+n^2}$ é comparável a $b_n = \frac{n^7e^n}{3^n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^7e^n+\ln n}{n^7e^n}\cdot\frac{1}{\frac{1+3^n+n^2}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n^7e^n}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{3^n}+1+\frac{n^2}{3^n}} = (1+0)\cdot\frac{1}{0+1+0} = 1$$

Pelo Teste da Raiz, verificamos que a série $\sum b_n$ é convergente:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^7e^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^7}e}{3} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^7\cdot\frac{e}{3} = \frac{e}{3} < 1$$

Como $L < 1$, o teste conclui que a série é convergente.

Resposta: A série é convergente.