Universidade Federal de Pernambuco
Exame Final de Cálculo 3
12 de Dezembro de 2016
Aluno: **Turma:**

GABARITO

1ª) **(2,0)** Calcule o trabalho realizado por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x + yze^{xyz}, y + xze^{xyz}, z + xye^{xyz})$$

ao longo da trajetória parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (5\cos t, 5\,\text{sen}\, t, t^2)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Solução:

Note que o campo $\overrightarrow{F}$ é conservativo. Uma função potencial associada ϕ satisfaz:

$$\begin{aligned} \phi_x &= x + yze^{xyz} \Rightarrow \phi = \frac{x^2}{2} + e^{xyz} + cte(y,z) \\ \phi_y &= y + yze^{xyz} \Rightarrow \phi = \frac{y^2}{2} + e^{xyz} + cte(x,z) \\ \phi_z &= z + yze^{xyz} \Rightarrow \phi = \frac{z^2}{2} + e^{xyz} + cte(x,y) \end{aligned}$$

Daonde podemos tomar $\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + e^{xyz}$.

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}r &= \phi\left(\overrightarrow{r}(\pi/4)\right) - \phi\left(\overrightarrow{r}(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(25 + \frac{\pi^4}{4^4}\right) + e^{\frac{25\pi^2}{2\cdot 4^2}} - \left(\frac{1}{2}(25+0) + 1\right) = \frac{\pi^4}{512} + e^{\frac{25}{32}\pi^2} - 1. \end{aligned}$$

Resposta: $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}r = \frac{\pi^4}{512} + e^{\frac{25}{32}\pi^2} - 1.$

$2^{\underline{a}}$) **(2,0)** Calcule a área da parte da superfície $S : z = xy$ que está dentro do cilindro $C : x^2 + y^2 = 4$.

Solução:

Uma parametrização para a superfície S é: $\overrightarrow{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\cos\theta\sin\theta)$, com $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Como, $\overrightarrow{r}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, r^2\cos 2\theta)$ e $\overrightarrow{r}_r = (\cos\theta, \sin\theta, r\sin 2\theta)$, temos que

$$\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta = (r^2\sin\theta, r^2\cos\theta, -r) \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta\| = r\sqrt{1+r^2}.$$

A área da superfície é dada pela integral

$$A(S) = \iint_D \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{1+r^2}drd\theta$$

Pela mudança de variáveis $y = 1 + r^2$, temos $\frac{dy}{2} = rdr$ e a área é igual a:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_1^5 \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

Resposta: $A(S) = \dfrac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$.

$3^{\underline{a}}$) **(3,0)** Calcule o fluxo de

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\cdot(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k})$$

através de $S: x^2+y^2+z^2=9$ em relação à normal apontando para fora.

Solução:

Pelo Teorema de Gauss, o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de S é: $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F}\cdot dS = \iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}dV$, onde V é a esfera sólida de raio 3.

Notemos que $\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 5(x^2+y^2+z^2)$. Logo

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot dS = 5\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV$$

Mudando para coordenadas esféricas: $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ e $dV = (\rho\operatorname{sen}\phi)d\rho^2 d\theta d\phi$.

$$5\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV = 5\int_0^3 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} 1 d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi = 5\cdot\left(\frac{3^5}{5}\right)\cdot 2\pi\cdot 2 = 972\pi$$

Resposta: 972π.

$4^{\underline{a}}$ **(3,0)** Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

a) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

b) Determine o valor da série acima para $x = \frac{\pi}{4}$.

Solução:

a) Usando o teste da razão, com $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2(n+1)} x^{2(n+1)} (2n)!}{(2(n+1))!(-1)^n 2^{2n} x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, o raio de convergência é $R = +\infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$.

Resposta: Raio de convergência: $R = +\infty$. Intervalo de convergência: $(-\infty, +\infty)$.

b) Substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ na série acima, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} (\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}.$$

Como $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, a série resultante é justamente a série do $\cos(\frac{\pi}{2})$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} (\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Resposta: zero.