APROXIMAÇÕES DIOFANTINAS E FRAÇÕES CONTÍNUAS

RICARDO T. BORTOLOTTI

1. Introdução

Arquimedes considerou a fração $\frac{22}{7}$ para aproximar π, o número $\frac{22}{7}$ está muito mais próximo de π do que a usual aproximação $3,1 = \frac{31}{10}$. Uma aproximação melhor é $\frac{355}{113}$, que está mais próxima de π do que a fração $3,141592 = \frac{3141592}{1000000}$.

Isso se deve ao fato de que as aproximações $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são obtidas através da fração contínua de π, enquanto que a escolha da base 10 para representar números é uma escolha artificial e nem sempre dá as melhores aproximações para números irracionais através de números racionais.

A Seção 2 está dedicada para o estudo de Aproximações Diofantinas. Enunciaremos dois teoremas importantes sobre aproximações diofantinas (Dirichlet e Kronecker) e colocaremos problemas que podem ser resolvidos com o auxílio desses Teoremas.

A Seção 3 é sobre Frações Contínuas. Apresentaremos o Algoritmo da Fração Contínua; listaremos propriedades das frações obtidas por esse algoritmo, chamadas de reduzidas, as quais justificam porque as frações contínuas são objetos que dão as melhores aproximações diofantinas.

Como o nosso foco é a resolução de problemas, as demonstrações foram omitidas, sendo indicadas as referências no final para um estudo completo.

2. Aproximações Diofantinas

Em geral, para cada número real α e inteiro q, existe um inteiro p tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q} \tag{1}$$

Para verificar isso, basta dividir $\mathbb{R}$ em intervalos da forma $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right)$ e considerar o p correspondente ao intervalo que contém α. O valor de $|\alpha - \frac{p}{q}|$ é chamada do **erro**, e o estudo das **aproximações diofantinas** corresponde a dar estimativas (superiores e inferiores) para o erro. Por exemplo, em (1) o erro é pelo menos $\frac{1}{q}$.

Uma estimativa melhor é dada pelo Teorema de Dirichlet, o qual diz que prodemos aproximar α por infinitas frações $\frac{p}{q}$ com erro pelo menos da ordem $\frac{1}{q^2}$ (que é muito menor quando q é grande).

2.1. **Teoremas de Dirichlet e Kronecker.**

Theorem 1 (Dirichlet). *Dado um número irracional α, existem infinitos inteiros p e q tais que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{2}$$

Uma consequência do Teorema de Dirichlet é obtido multiplicanda (2) por q: existem infinitos inteiros p e q tais que $|q\alpha - p| < 1/q$, o que é equivalente a dizer que a parte fracionária de $q\alpha$ é tão pequena quanto quisermos para infinitos q's. Uma versão mais forte desse fato é o seguinte:

Theorem 2 (Kronecker). *Se α é um número irracional, então a sequência $\{n\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ é densa em $[0,1]$.*

O Teorema de Kronecker admite um versão multidimensional quando as coordenadas de $\overrightarrow{\alpha}$ são racionalmente independentes. Dizemos que um vetor $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tem coordenadas racionalmente independentes se não existem inteiros $m_1, \cdots, m_n$ não todos nulos para os quais $m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n$ é inteiro.

Theorem 3 (Kronecker multidimensional). *Se $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ tem coordenadas racionalmente independentes, então a sequência $\{n\overrightarrow{\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é densa em $[0,1]^d$.*

Os Teoremas de Dirichlet e Kronecker são interessantes para resolver problemas olímpicos relacionados com aproximações diofantinas, como os seguintes:

Problema 1. *Existe uma potência de 2 cujos primeiros 2017 dígitos são iguais a 1.*

Dica: Aplique o Teorema de Kronecker para $\alpha = \log_{10} 2$.

Problema 2. *Dado qualquer inteiros positivos N e M, existe uma potência de M cujos primeiros dígitos correspondem ao número N.*

Problema 3. *Existe algum inteiro n para o qual os primeiros 2017 dígitos de 2^n são iguais a 3 e os primeiros 2017 dígitos de 3^n são iguais a 2.*

Problema 4. *Prove que $\limsup_{n\to\infty} \cos^n(n\alpha) = 1$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dica: A aproximação entre $\cos x$ e 1 quando $x \to 0$ é da ordem de x^2.

2.2. **O Problema 6 da IMO de 1991.** O Problema 6 da IMO costuma ser, a cada ano, interessante e difícil. É o problema mais difícil dos dois dias e nem mesmo todos os medalhistas de ouro o resolvem. Costumam aparecer várias soluções criativas para estes problemas e, às vezes, anos depois seguem aparecem novas soluções.

O Problema 6 da IMO de 1991, no qual é pedido para demonstrar a existência de uma sequência com satisfazendo certa desigualdade entre os termos, pode ser resolvido construindo tal sequência diretamente. Entretanto, este problema admite também uma solução criativa usando aproximações contínuas de $\sqrt{D}$.

Problema 5. *Considere a e b inteiros e D um inteiro positivo que não é quadrado perfeito, prove que*

$$|a\sqrt{D} - b| \geq \frac{1}{a\sqrt{D} - b}$$

Problema 6 (Prova de Seleção para a Cone Sul 2003). *Sendo a e b inteiros positivos, prove que*

$$|a\sqrt{2} - b| > \frac{1}{2a + b}$$

Problema 7 (Problema 6 da IMO de 1991). *Uma sequência infinita $x_0, x_1, x_2, \cdots$ de números reais é dita limitada quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|x_n| \leq$*

C para todo $n \geq 0$. Dado um real $a > 1$, prove que existe uma sequência infinita limitada $x_0, x_1, x_2, \cdots$ tal que

$$|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$$

para todos i, j inteiro não negativos distintos.

Dica: Tome $\alpha = \sqrt{D}$ e considere $x_n = K\{n\alpha\}$ para algum número K suficientemente grande. A desigualdade do exercício anterior pode ser útil.

2.3. **Problemas.**

Problema 8 (Dirichlet k-dimensional)**.** *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ reais. Prove que para todo inteiro positivo N existem $r, m_1, m_2, \cdots, m_k$ inteiros, não todos nulos, com $|m_i| \leq N$ para todo $i \leq k$, tais que*

$$|m_1\alpha_1 + \cdots + m_k\alpha_k - r| < \frac{1}{N^k}$$

Problema 9. *Mostre que se α e β são números irracionais positivos satisfazendo $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, então as sequências*

$$\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \cdots \quad e \quad \lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \cdots$$

juntas contém todo inteiro positivo exatamente uma vez.

Problema 10. *Sejam a, b, c inteiros não todos nulos. Mostre que*

$$\frac{1}{4a^2 + 3b^2 + 2c^2} \leq |\sqrt[3]{4}a + \sqrt[3]{2}b + c|$$

Problema 11. *Mostre que a sequência $a_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ contém um número infinito de termos que são potências de 2.*

Problema 12 (OBM-U - 2014 (Problema 6, 2a fase))**.** *Considere um número real α e constantes $b > 0$ e $\gamma \geq 1$ tais que para quaisquer p e q inteiros com $q \geq 1$ vale*

$$|q\alpha - p| \geq \frac{b}{q^\gamma}.$$

Prove que existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo inteiro $N \geq 1$, o conjunto

$$X_N = \{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor | m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq CN^\gamma\}$$

tem a propriedade de que, para todo $x \in [0, 1]$, existe $y \in X_n$ com $|x - y| < 1/N$.

Problema 13 (CIIM - 2014)**.** *a) Seja $\{x_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência com $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \geq 1$. Prove que existe $C > 0$ tal que, para todo inteiro positivo r, existem $m \geq 1$ e $n > m + r$ tais que $(n + m)|x_n - x_m| \leq C$.*

b) Prove que, para todo $C > 0$, existem uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \geq 1$ e um inteiro positivo r tais que, se $m \geq 1$ e $n > m + r$ então $(n - m)|x_n - x_m| > c$.

2.4. **Aplicação: Inteiros algébricos e número transcendentais.** As aproximações diofantinas também tem aplicações no estudo de raízes de polinômios.

Dizemos que α é um **inteiro algébrico** se é raiz de algum polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros, dizemos ainda que α é um **inteiro algébrico de grau** n o polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros que tem α como raiz de menor grau tem grau n. Chamamos de **números transcendentes** aqueles que não são inteiros algébricos.

Para inteiros algébricos de grau n, as melhores aproximações diofantinas são de ordem $\frac{1}{q^n}$, conforme diz o seguinte problema.

Problema 14. *Seja $p(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes inteiros e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma raiz de $p(x)$, então existe alguma constante $C > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n} \tag{3}$$

para todos inteiros p e q.

Note que a desigualdade (3) está na direção contrária da desigualdade dada pelo Teorema de Dirichlet, ela está dizendo que α pode ser aproximado por racionais mas "não muito bem aproximado assim".

Problema 15. *Considere a **constante Liouvillle** $c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$. Usando o resultado do problema acima, demonstre que c é um número transcendente.*

Problema 16. *Dado qualquer inteiro k, defina $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n!}}$. Demonstre que x é um número transcendente.*

É sabido que o conjunto dos números algébricos é enumerável e, portanto, "quase todos" os números reais são trascendentes. Podemos dividir o conjunto dos números transcendentes em dois subconjuntos: os números bem aproximados por racionais (números de Liouville) e o conjunto dos números mal aproximados por racionais (números diofantinos). Também é sabido que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula, portanto "quase todos" os números reais são números diofantinos.

Mais precisamente, as definições e os fatos no parágrafo acima são estes:

Definição. *Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é dito um **número de Lioville** se para todo inteiro $n \in \mathbb{N}$ e todo $C > 0$ existem inteiros p e q tais que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^n} \tag{4}$$

Definição. *Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é dito um **número diofantino** se existe algum inteiro $n \in \mathbb{N}$ e uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n} \tag{5}$$

para todos inteiros p e q.

Definição. *Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem **medida nula** se para todo $\epsilon > 0$ existem intervalos abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $X \subset \cup_n I_n$ e a soma dos comprimentos de I_n é menor que ϵ.*

Problema 17. *Demonstre que o conjunto dos inteiros algébricos é enumerável.*

Problema 18. *Demonstre que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula, embora seja um conjunto não-enumerável.*

Problema 19. *Demonstre que a constante de Liouvillle* $c = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ *é um número de Liouville.*

Problema 20. *Demonstre que todo número de Liouville é trascendente.*

2.5. **Curiosidade: O Teorema de Weyl.** O Teorema de Kronecker diz que se α é irracional (ou $\to \alpha$ tem coordenadas racionalmente independentes) então $\{n\alpha$ (ou $\{n \to \alpha\}$) "se espalha por todo" o conjunto $[0,1]$ (ou $[0,1]^n$). O Teorema de Weyl dá uma informação estatística mais forte ainda: a sequência se distribui de maneira uniforme.

Definição. *Considere uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contida em* $[0,1]$ *(ou* $[0,1]^n$*). Dizemos que* $\{x_n\}$ *é uma sequencia* ***uniformemente distribuída*** *(ou* ***equidistribuída****) se para qualquer intervalo fechado* I *(ou paralelepípedo retangular* I*), temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{j|1 \leq j \leq n \text{ tais que } x_j \in I\}}{n} = m(I) \tag{6}$$

aonde $m(I)$ *é o comprimento de* I *(ou volume de* I*).*

A expressão (6) diz que a média da quantidade de x_j's que pertencem a I, com j entre 1 e n, é exatamente a medida de I! O Teorema de Weyl pode ser entendido como uma versão estatística do Teorema de Kronecker.

Theorem 4 (Weyl)**.** *Seja* $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *um vetor com coordenadas racionalmente independentes. Então a sequência* $\{n\overrightarrow{\alpha}\}_n$ *é uniformemente distribuída em* $[0,1]^d$.

3. Frações Contínuas

3.1. **O Algoritmo da Fração contínua.** Dado um números $x \in \mathbb{R}$. Definimos inteiros a_n recursivamente por:

$$\alpha_0 = x \quad , \quad a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$$
$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\{\alpha_n\}} \quad , \quad a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor .$$

Essa recorrência fornece um algoritmo com entrada x e saída a sequência $a_0, a_1, a_2, \cdots$. Se α_n for um inteiro então paramos o algoritmo nessa etapa. Assim temos:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

A fração acima é a **fração contínua** de x e é denotada por $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$. A cada x associamos uma fração $\frac{p_n}{q_n} = [a_0.a_1, a_2, \cdots, a_n]$, a qual é chamada de **reduzida** de x.

3.2. **Expansão finita e o Algoritmo de Euclides.** Se $x = \frac{p}{q}$ é racional, então o algoritmo pára em algum momento e os termos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ obtidos são os mesmos que aparecem no Algoritmo de Euclides (aquele para encontrar o mdc entre p e q). Isso porque o Algoritmo de Euclides dá:

$$\begin{aligned} p &= a_0 q + r_1 \quad , \quad 0 \leq r_1 \leq q \\ q &= a_1 r_1 + r_2 \quad , \quad 0 \leq r_2 \leq r_1 \\ r_1 &= a_1 r_2 + r_3 \quad , \quad 0 \leq r_3 \leq r_2 \\ &\vdots \\ r_n &= a_n r_{n+1} \end{aligned}$$

Desenvolvendo o algoritmo da fração contínua, vemos que o a_n's que aparecem são os mesmos a_n's acima:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \cdots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}} \tag{7}$$

Problema 21. *Calcule as seguintes frações contínuas:*
a) $\frac{343}{31} = [11; 15, 2]$.
b) $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \cdots]$.
c) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, \cdots]$.

Duas frações contínuas importantes, a saber, são:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \cdots] \quad \text{e} \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \cdots, 1, 2n, 1, \cdots]$$

Sobre o Algoritmo das Frações Contínuas, conforme os a_n's obtidos sejam finitos ou periódicos, temos estas 2 propriedades que os caracterizam:

Proposição 1. *A expansão de x em frações contínuas é finita se, e somente se, x é um número racional.*

Proof. Sendo $x = \frac{p}{q}$, segue do Algoritmo de Euclides, conforme (7). □

Proposição 2. *A expansão de x em frações contínuas é periódica se, e somente se, x é um número irracional raiz de alguma equação do segundo grau com coeficientes inteiros (isto é, $x = r + \sqrt{s}$ para algum $r, s \in \mathbb{Q}$).*

Proof. A prova pode ser consultada em qualquer uma das referências na bibligrafia. □

Problema 22. *Considerando $x = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots]$, encontre uma equação quadrática com coeficientes inteiros que tenha x como raiz.*

3.3. **Reduzidas e boas aproximações.** Para cada número real α, sejam $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \cdots, a_n]$ a sequência de reduzidas.

Existem relações envolvendo p_n e q_n, que permitem demonstrar que $\frac{p_n}{q_n}$ são boas aproximações de α. Apenas enunciaremos elas e indicamos as referências da bibliografia para uma demonstração completa.

Proposição 3. *Se* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$, *então* p_n *e* q_n *satisfazem a seguinte relação de recorrência de segunda ordem:*

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \quad e \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \tag{8}$$

com $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$. *E também satisfazem a relação para todo* $n \geq 0$*:*

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n \tag{9}$$

Obs. *Se* $a_n = 1$ *para todo* $n \geq 0$, *então a recorrência (8) corresponde à recorrência da sequência de Fibonacci. Isso ocorre para a fração contínua de* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; , 1, 1, \cdots]$, *cujas reduzidas, portanto, são* $\frac{p_n}{q_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

A recorrência (8) e a relação (9) permite trabalharmos para calcular $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$, obtendo:

Proposição 4. *Temos*

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} \tag{10}$$

onde $\beta_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{q_n}$.

Em particular vemos que $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \sim \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$, pois $\alpha_{n+1} = \lfloor a_{n+1} \rfloor$ e $\beta_{n+1} \in (0, 1)$, obtendo:

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1} + 2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n^2} \tag{11}$$

Daí segue que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$, uma vez que $\{q_n\}$ é crescente, e segue também o Teorema de Dirichlet, provando que o algoritmo das frações contínuas fornece boas aproximações.

Com um pouco mais de esforço provamos os seguintes teoremas:

Theorem 5 (Dirichlet)**.** *Considere um número* α *e a sequência de reduzidas* $\frac{p_n}{q_n}$, *então para todo* $n \geq 0$

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Note que este teorema acima é o Teorema de Dirichlet mencionado anteriormente, agora explicitando que a fração $\frac{p}{q}$ pode ser tomada a sequência $\frac{p_n}{q_n}$ dá as aproximações desejadas.

Theorem 6 (Lagrange)**.** *Considere um número* α *e a sequência de reduzidas* $\frac{p_n}{q_n}$, *então para todo* $n \geq$ *algum* $\frac{p}{q} \in \{\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\}$ *satisfaz:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

Theorem 7 (Hurwitz-Markov)**.** *Considere um número* α *e a sequência de reduzidas* $\frac{p_n}{q_n}$, *então para todo* $n \geq$ *algum* $\frac{p}{q} \in \{\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}\}$ *satisfaz:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

Também é válida uma recíproca: boas aproximações vem das frações contínuas, conforme as duas proposições abaixo:

Proposição 5. *Sejam α um número real e $\frac{p_n}{q_n}$ a sequência de reduzidas, então para todos inteiros p e q com $0 < q < q_n$ temos:*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \tag{12}$$

Proposição 6. *Sejam α um número real e p, q inteiros tais que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de α.*

4. Problemas

Problema 23. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência crescente de inteiros positivos tais que para todo K existe um $n \geq 0$ tal que $a_{n+1} > Ka_n$. Mostre que $\sum 2^{-a_n}$ é um número de Liouville (e portanto é transcendente).*

Problema 24. *Sabendo que $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \cdots, 1, 2n, 1, \cdots]$, prove que e é irracional.*

References

[1] Brochero, F.; Moreira, C.G.; Saldanha, N.; Tengan, E. - Teoria dos números - um passeio pelo mundo inteiro com primos e outros números familiares, Projeto Euclides.
[2] Moreira, C.G. - Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas.
[3] Beskin, N.M. - Fascinating Fractions, Editora MIR.