Integral de Frullani

Thiago Landim

Esse artigo apresentará o Teorema de Frullani, algumas de suas generalizações, e, é claro, vários problemas. Iremos antes apresentar um problema, depois partiremos para enunciar e demonstrar o teorema.

Exemplo 1

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\log 3.$$

Chamemos por I a integral que desejamos calcular. Como $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$, então

$$I = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{x^2}\,dx.$$

Note que não podemos fazer

$$I = \frac{1}{4}\left(\int_0^\infty \frac{3\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}\,dx\right),$$

pois ambas as integrais divergem. Então tomamos

$$I = \frac{1}{4}\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_\delta^\infty \frac{3\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx - \int_\delta^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}\,dx\right).$$

Fazemos agora a substituição $y = 3x$ na segunda integral, e ficamos com

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_\delta^\infty \frac{3\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx - \int_{3\delta}^\infty \frac{3\operatorname{sen} y}{y^2}\,dy\right) \\ &= \frac{3}{4}\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^{3\delta} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx. \end{aligned}$$

E, como $\frac{\operatorname{sen}}{x^2} \approx \frac{1}{x}$ quando x está próximo de 0, então

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4}\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^{3\delta} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{3}{4}\log 3. \end{aligned}$$

A demonstração do teorema é análoga à solução do exemplo.

Teorema 1 (Frullani) *Seja f contínua em $(0,+\infty)$ tal que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = c_0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = c_\infty$ existem. Então, para a e b reais positivos,*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = (c_\infty - c_0)\log\frac{a}{b}.$$

Demonstração 1 *Iremos analisar*

$$\int_r^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

e tomaremos $r \to 0$ *e* $R \to \infty$*. Separando as integrais, ficamos com*

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_r^R \frac{f(bx)}{x}\,dx &= \int_{ar}^{aR} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{br}^{bR} \frac{f(v)}{v}\,dv \\ &= \int_{bR}^{aR} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{br}^{ar} \frac{f(s)}{s}\,ds.\end{aligned}$$

Sabemos que, dado $\epsilon > 0$, $c_\infty - \epsilon < f(t) < c_\infty + \epsilon$ *para todo* t *suficientemente grande. Ou seja,*

$$c_\infty \log(\frac{a}{b}) - \epsilon\log(\frac{a}{b}) < \int_{bR}^{aR} \frac{f(t)}{t}\,dt < c_\infty \log(\frac{a}{b}) + \epsilon\log(\frac{a}{b})$$

para R *suficientemente grante.*

Tomando $R \to \infty$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{bR}^{aR} \frac{f(t)}{t}\,dt = c_\infty \log(\frac{a}{b}).$$

Argumentando da mesma forma, vemos que

$$\lim_{r\to 0} \int_{br}^{ar} \frac{f(s)}{s}\,ds = c_0 \log(\frac{a}{b}).$$

de onde segue o teorema. ■

O clássico exemplo de uma integral de Frullani é o seguinte.

Exemplo 2

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Desse resultado, segue também a seguinte integral que *Mathematica* falha em calcular.

Exemplo 3

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(px)-\arctan(qx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{p}{q}\right).$$

Menos imediatos são os cálculos das seguintes integrais:

Exemplo 4

$$\int_0^1 \frac{x^7-x^5}{\log x}\,dx = \log\left(\frac{4}{3}\right).$$

Note que se, no Exemplo 2, tomarmos $u = e^{-x}$*, então teremos o seguinte resultado:*

$$\int_0^1 \frac{u^{a-1}+u^{b-1}}{\log u}\,du = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

e basta substituir $a = 8$ *e* $b = 6$.

Exemplo 5

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x(e^{ax}+1)(e^{bx}+1)}\,dx = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{e^{bx}+1}-\frac{1}{e^{ax}+1}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{a}{b}\right).$$

Outro resultado interessante (e não muito natural, à primeira vista) é:

Exemplo 6

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\right)\frac{dx}{x} = \log\left(1+\frac{q}{p}\right)\log\left(\frac{b}{a}\right).$$

que segue ao tomarmos $f(x)=\log(p+qe^{-x})$.

O leitor é convidado a encontrar os valores da integral para $f(x) = e^{-x}\cos x$ e $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x$.

Entretanto, o teorema até agora demonstrado não é tão forte quanto poderíamos desejar. Ele por exemplo é incapaz de calcular o resultado quando tomamos $f(x) = \cos x$ (e também para $f(x) = \operatorname{sen} x$, mas esse caso segue de $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ usando a substituição $x = ay$). De que maneira, então, devemos generalizar o resultado anterior?

Iremos enunciar um teorema fácil de demonstrar que serve aos nossos propósitos. Para um caso mais geral, ver Ostrowski [3].

Teorema 2 *Se* $\lim_{x\to 0} f(x) = c_0$ *e* $\int_0^x f(t)dt$ *é limitada nos positivos, então*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = c_0\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Demonstração 2 *Assim como na demonstração do Teorema 1, podemos mostrar que*

$$\lim_{r\to 0}\int_{ar}^{br} f(t)\,dt = c_0\log\left(\frac{a}{b}\right).$$

Chame $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ *e seja* K *tal que* $F(x) \le K$ $\forall x$ *positivo. Então a regra do produto nos diz que*

$$\int_{bR}^{aR}\frac{f(t)}{t}dt = \left.\frac{F(t)}{t}\right|_{t=bR}^{aR} + \int_{bR}^{aR}\frac{F(t)}{t^2}dt \le \frac{4K}{bR},$$

e, tomando $R\to\infty$, $\int_{bR}^{aR}\frac{f(t)}{t}dt \to 0$, *de onde segue o teorema.* ■

Exemplo 7 *Como* $\operatorname{sen} x$ *é uma função limitada e* $\cos(0) = 1$, *temos que*

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Portanto segue a seguinte fórmula não trivial

Exemplo 8

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}(qx)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos[(p-q)x]-\cos[(p+q)x]}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{p+q}{p-q}\right)$$

Agora podemos aplicar o que produzimos para calcular as integrais da forma

$$I(n,m) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^n x}{x^m} dx$$

para m, n inteiros satisfazendo $n \geq m$.

Dividiremos em dois casos, o qual o primeiro não precisa de Frullani.

Antes de calcularmos, lembremos a fórmula para $\operatorname{sen}^n x$. Para encontrá-las, usamos que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ e $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Temos então que:

$$\operatorname{sen}^4 x = \frac{1}{2^3}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$

$$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{2^4}(10 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x)$$

e afins.

Os casos em que iremos separar são:

I) $m + n$ é par.

Aqui não precisaremos de Frullani, apenas de $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ para todo a positivo. Um exemplo mostrará melhor a natureza do truque.

Exemplo 9

$$I(5,3) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^3} dx = \frac{5\pi}{32}$$

De início, usemos a regra do produto para transformar a integral em algo mais próximo do que conhecemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^5}{x^3} dx &= -\frac{\operatorname{sen}^5 x}{3x^2}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sen}^5 x)'}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sen}^5 x)'}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2!}\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sen}^5 x)''}{x} dx \\
&= \frac{1}{2!}\frac{1}{2^4}\int_0^\infty \frac{(10 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x)''}{x} dx \\
&= \frac{1}{2!}\frac{1}{2^4}\int_0^\infty \frac{-10 \operatorname{sen} x + 5 \cdot 3^2 \operatorname{sen} 3x - 5^2 \operatorname{sen} 5x}{x} dx \\
&= \frac{1}{2!}\frac{1}{2^4}\frac{\pi}{2}(-10 + 5 \cdot 3^2 - 5^2) \\
&= \frac{5\pi}{32}
\end{aligned}$$

Agora um exemplo com m, n pares.

Exemplo 10

$$I(8,4) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^8 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{12}$$

Iremos fazer o mesmo processo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^8 x}{x^4}dx &= \frac{1}{3!}\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sen}^8 x)'''}{x}dx \\
&= \frac{1}{3!}\frac{1}{2^7}\int_0^\infty \frac{(35-56\cos 2x+28\cos 4x-8\cos 6x+\cos 8x)'''}{x}dx \\
&= \frac{1}{3!}\frac{1}{2^7}\int_0^\infty \frac{-56\cdot 2^3\operatorname{sen} 2x+28\cdot 4^3\operatorname{sen} 4x-8\cdot 6^3\operatorname{sen} 6x+8^3\operatorname{sen} 8x}{x}dx \\
&= \frac{1}{3!}\frac{1}{2^7}\frac{\pi}{2}(8^3-8\cdot 6^3+28\cdot 4^3-56\cdot 2^3) \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Entretanto, esse processo não funciona para todos os casos.

II)$m+n$ é ímpar.

Novamente iremos estudar o método por meio de exemplos, mas, antes, demonstraremos uma generalização de Frullani.

Teorema 3 *Seja f uma função que satisfaz as mesmas condições que o Teorema 1, e $g(x) = \sum_{j=1}^n k_j f(a_j x)$, onde $\sum_{j=1}^n k_j = 0$. Então:*

$$\int_0^\infty \frac{g(x)}{x}dx = (c_\infty - c_0)\sum_{j=1}^n k_j \log a_j.$$

Demonstração 3 *Essa g pode ser escrita como*

$$g(x) = k_1(f(a_1x)-f(a_2x))+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})(f(a_{n-1}x)-f(a_nx))+(k_1+\cdots+k_n)f(a_nx)$$

onde a última parcela sabemos já ser 0.

Usando Frullani em casa parcela, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{g(x)}{x}dx &= (c_\infty - c_0)[k_1(\log a_1 - \log a_2) + (k_1+k_2)(\log a_2 - \log a_3) + \cdots + (k_1+\cdots+k_n)(\log a_{n-1} - \log a_n)] \\
&= (c_\infty - c_0)\sum_{j=1}^n k_j \log a_j.
\end{aligned}$$

■

Usaremos o teorema análogo para o caso em que $f(x) = \cos x$. Embora não tenha sido enunciado, a demonstração é idêntica à acima.

Exemplo 11

$$I(5,4) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^4}dx = \frac{5}{96}\log\left(\frac{5^{25}}{3^{27}}\right)$$

Pelo mesmo processo que o caso anterior, sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^4}dx &= \frac{1}{3!}\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sen}^5 x)'''}{x}dx \\
&= \frac{1}{3!}\frac{1}{2^4}\int_0^\infty \frac{(10\operatorname{sen} x - 5\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x)'''}{x}dx \\
&= \frac{1}{3!}\frac{1}{2^4}\int_0^\infty \frac{-10\cos x + 5\cdot 3^3\cos 3x - 5^3\cos 5x}{x}dx
\end{aligned}$$

e note que $-10 + 5 \cdot 3^3 - 5^3 = 0$. *Portanto podemos usar o teorema anterior e teremos que*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^4} dx = -\frac{5 \cdot 3^3 \log 3 - 5^3 \log 5}{96}$$

de onde segue o resultado.

Referências

[1] Zwillinger, D.. *Handbook of integration*, Jones and Bartlett, 1992.

[2] Moll, V. H.. *Special Integrals of Gradshteyn and Ryzhik: The Proofs* (Vol. I), CRC Press, 2015.

[3] Ostrowski, A.. *On Cauchy-Frullani Integrals* Comment. Math. Helv. 51 (1976), 57-91.

[4] Trainin, J.. *Integrating expressions of the form* $\frac{sin^n x}{x^m}$ *and others*, Math. Gazette 94 (2010), 216-223.

[5] Jameson, G. J. O.. *The Frullani Integrals*, `http://www.maths.lancs.ac.uk/jameson/`frullani.pdf