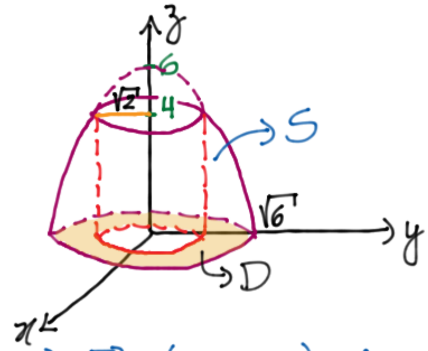
GABARITO - 2EE CÁLCULO 3 - 2017.1

QUESTÃO 1:



(a) A superfície S faz parte de um paraboloide.

(b) S pode ser parametrizada como gráfico fazendo $\vec{r}(x,y)=(x,y,6-x^2-y^2)$, com $(x,y)\in D$, onde $D=\{(x,y): 2\leq x^2+y^2\leq 6\}$, isto é, D é uma coroa circular.

(c) O campo normal que aponta para cima em S é $\vec{r}_x\wedge\vec{r}_y=(2x,2y,1)$. No ponto $(0,2,2)$ esse vetor é $(0,4,1)$, logo o vetor normal unitário que aponta para cima é $\left(0,\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

(d) Temos $dS=\|\vec{r}_x\wedge\vec{r}_y\|\,dA=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA$, logo $A(S)=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA$. Usando coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, $\sqrt{2}\leq r\leq\sqrt{6}$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$, temos $A(S)=$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta=\begin{pmatrix}u=1+4r^2\\ du=8r\,dr\end{pmatrix}=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_9^{25}\sqrt{u}\,\frac{du}{8}=\frac{2\pi}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_9^{25}=\frac{\pi}{6}(125-27)=\frac{98\pi}{6}=\boxed{\frac{49\pi}{3}}.$$

■

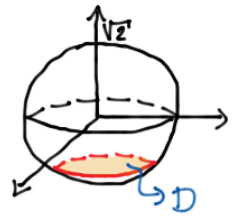
QUESTÃO 2:

(a) Temos
$$\text{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ yz+\frac{1}{3}y^3 & xy^2-xz & z^2+\text{sen}(e^z)\end{vmatrix}=(x,\,y,\,y^2-z-y^2-z)=$$
$$=\boxed{(x,y,-2z)}.$$

(b) Seja S a parte da superfície $z=xy$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=9$ com campo normal apontando para cima. Então a fronteira de S é a curva C e as orientações de S e C são compatíveis, logo $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S\text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$.

A parametrização de S é $\vec{r}(x,y)=(x,y,xy)$, logo $\vec{r}_x\wedge\vec{r}_y=(-y,-x,1)$, que aponta para cima, e $x^2+y^2\leq 9$. Assim, $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{x^2+y^2\leq 9}(x,y,-2xy)\cdot(-y,-x,1)\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\leq 9}(-4xy)\,dx\,dy$. Usando coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, $0\leq r\leq 3$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$, temos $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{3} (-4r\cos\theta\, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi} 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^{3} r^3\,dr = \begin{pmatrix} u=\text{sen}\,\theta \\ du=\cos\theta\,d\theta\end{pmatrix} = -4\int_0^{0} u\,du \cdot \int_0^{3} r^3\,dr =$$
$$= \boxed{0}.$$



QUESTÃO 3: (a) O disco D está contido no plano $z=-1$, logo uma parametrização é $\vec{r}(x,y)=(x,y,-1)$, e um vetor normal que aponta para cima é $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y=(0,0,1)$.

O disco D é dado por $x^2+y^2+(-1)^2 \leq 2$, $z=-1$, ou seja, $x^2+y^2\leq 1$ fornece o domínio de variação dos parâmetros x e y.

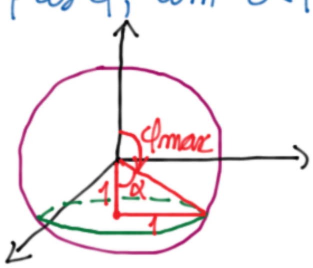
Daí, $\iint_D \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (*,*,8y^2)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 8y^2\,dx\,dy$. Novamente usamos coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, com $0\leq r\leq 1$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$, logo $\iint_D \vec{F}\cdot d\vec{S} =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} 8r^2\,\text{sen}^2\theta\; r\,dr\,d\theta = 8\int_0^{2\pi}\text{sen}^2\theta\,d\theta \cdot \int_0^{1} r^3\,dr = 8\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\text{sen}(2\theta)}{2}\,d\theta\cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\theta+\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4} =$$
$$= \left(2\pi+\frac{1}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right) = \boxed{2\pi}.$$

(b) $\text{div}\,\vec{F} = 2z$.

(c) Como a orientação é pela normal exterior usaremos o Teorema da Divergência na região E de fronteira orientada $S\cup(-D)$. Assim, $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_D \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div}\,\vec{F}\,dV$, logo $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E 2z\,dx\,dy\,dz + 2\pi$. Note que a região E pode ser expressa como a união de um cone E_1, de vértice na origem, com uma cunha esférica E_2.

Representamos E_2 por coordenadas esféricas $x=\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$, $y=\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$ e $z=\rho\cos\phi$, com $0\leq\rho\leq\sqrt{2}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, e para ϕ, temos $0\leq\phi\leq\phi_{max}$. Pela figura,



vemos que $\alpha=\pi/4$, logo $\phi_{max}=3\pi/4$. Daí, $\iiint_{E_2} 2z\,dx\,dy\,dz =$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{3\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\phi\;\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^{3\pi/4}\text{sen}\,\phi\cos\phi\,d\phi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho = \begin{pmatrix} u=\text{sen}\,\phi \\ du=\cos\phi\,d\phi\end{pmatrix}$$
$$= 2\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}/2} u\,du\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}/2}\cdot\frac{4}{4} = 4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4} = \boxed{\pi}.$$

Já E_1 pode ser descrita em coordenadas cilíndricas como $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e $z = z$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq z < 0$ e $0 \leq r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z^2} = -z$, já que esse cone tem equação $z^2 = x^2+y^2$ e $z \leq 0$. Assim, $\iiint_{E_1} 2z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\int_0^{-z} 2zr\,dr\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0} zr^2\Big|_{r=0}^{r=-z} dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0} z^3\,dz\,d\theta =$
$= 2\pi \cdot \frac{z^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$.

Daí, $\iiint_E 2z\,dx\,dy\,dz = \pi - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$, logo $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \boxed{\frac{5\pi}{2}}$. ■