(01) $\rho(x,y)=x^2+y^2+z^2$. Temos $\vec{r}'(t)=(1,-\operatorname{sen}t,\cos t)$, logo $\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{2}$. Daí, o comprimento da curva é
$C=\int_0^1\|\vec{r}'(t)\|dt=\int_0^1\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\,t\Big|_0^1=\sqrt{2}$ e $m=\int_C\rho\,ds=\int_0^1(t^2+1)\cdot\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_0^1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\boxed{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$.

(02) (a) $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen}^3t,\cos t\operatorname{sen}^2t)\cdot(-\operatorname{sen}t,\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^4t+\cos^2t\operatorname{sen}^2t)\,dt=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2t(\operatorname{sen}^2t+\cos^2t)\,dt=$
$=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{t}{2}-\frac{\cos(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi}=\boxed{\pi}$.

(b) Não, pois se $\vec{F}$ fosse conservativo a integral no item (a) valeria zero.

(c) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^4-3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(d) Basta considerar uma circunferência centrada na origem e de raio pequeno o suficiente para estar contida no interior da região limitada por C e usar o Teorema de Green.

(03) (a) $\vec{F}$ está definido em $\mathbb{R}^2$, que é aberto e simplesmente conexo. Como $\frac{\partial P}{\partial y}=-6xy^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\vec{F}$ é conservativo.

(b) $f(x,y)=2x^5-x^2\cdot y^3$.

(c) A integral vale $f(3,2)-f(0,0)=2\cdot3^5-3^2\cdot2^3=2\cdot243-72=\boxed{414}$

(04) (a) <u>Horário</u>. Note que $y(t)=\operatorname{sen}t\cos t$ é positivo se $0<t<\pi/2$ e negativo se $\pi/2<t<\pi$.

(b) Considere o campo $\vec{F}(x,y)=(0,x)$, de modo que $P(x,y)=0$ e $Q(x,y)=x$. Pelo Teorema de Green, $\int_C x\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D 1\,dA=A(D)$ se a orientação de C for positiva, e $\int_C x\,dy=$
$=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=-\iint_D 1\,dA=-A(D)$ se a orientação for negativa. Em todo caso, $A(D)=\left|\int_C x\,dy\right|$.

(c) Como a orientação é negativa, $A(D)=-\int_0^\pi x\,dy=-\int_0^\pi\operatorname{sen}t(\cos^2t-\operatorname{sen}^2t)\,dt=-\int_0^\pi(\operatorname{sen}t\cos^2t-\operatorname{sen}t\cdot\operatorname{sen}^2t)\,dt$
$=-\int_0^\pi(\operatorname{sen}t\cos^2t-\operatorname{sen}t(1-\cos^2t))\,dt=-\int_0^\pi(2\operatorname{sen}t\cos^2t-\operatorname{sen}t)\,dt=-2\int_0^\pi\operatorname{sen}t\cos^2t\,dt+\int_0^\pi\operatorname{sen}t\,dt=-2\int_{-1}^1u^2\,du-\cos t\Big|_0^\pi=$
$=-\frac{2u^3}{3}\Big|_{-1}^1-(-1-1)=-\frac{4}{3}+2=\boxed{\frac{2}{3}}$.