Gabarito - Final - Cal. 3 - 2017.1

1) Calcule a massa e o centro de massa de um arame C que, num sistema cartesiano, é dado por $8x^2 = y^3$, com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$ e densidade linear

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{18y+64}}.$$

<u>Resposta:</u> A massa M e o centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ são dados por

$$M = \int_C \rho \, ds,$$

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \int_C x\rho \, ds,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \int_C y\rho \, ds.$$

Observe que $y = 2x^{\frac{2}{3}}$, então fazendo $x = t^3$ teremos $y = 2t^2$ e $0 \leq t \leq 1$.

Assim $ds = \|(3t^2, 4t)\| dt = \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt$
$= t\sqrt{9t^2+16}\, dt$ e $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{18 \cdot 2t^2 + 64}} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{9t^2+16}}$, e assim $\rho\, ds = \dfrac{t}{2} dt$.

<u>Portanto:</u> $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2} t\, dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

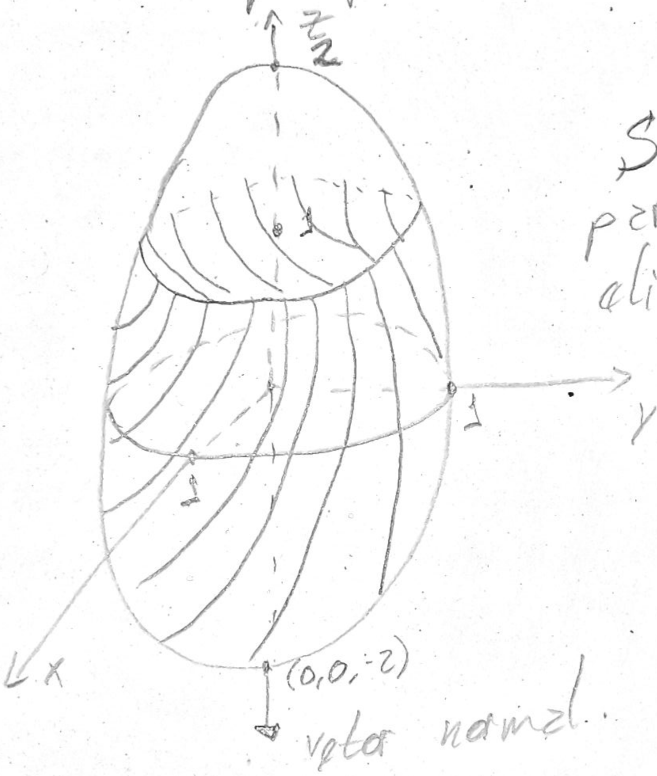
$$\bar{x} = \frac{1}{1/4} \int_0^1 t^3 \cdot \frac{t}{2}\, dt = 2\, \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{1/4} \int_0^1 2t^2 \cdot \frac{t}{2}\, dt = 4\, \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = 1.$$

$\Rightarrow M = 1/4$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/5, 1)$ //

2) Considere o campo vetorial $F(x,y,z) = x\cdot\hat{j} + xy\cdot\vec{k}$ e a superfície S descrita pelas relações $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ e $z\leq 1$, orientada de modo que o vetor normal no ponto $(0,0,-2)$ aponta para baixo

a) Esboce a superfície S.



S é uma parte de um elipsoide.

b) Determine a curva que é fronteira de S e oriente-a positivamente.

Na fronteira temos $z=1$, então a equação que descreve a curva é

$$x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

A curva deve está orientada no sentido anti-horário vista de baixo, ou equivalentemente, no sentido horário vista de cima. Então uma parametrização para a fronteira é

$$r(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 1\right)$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) Calcule o fluxo do rotacional de F atravez de S.

Vamos utilizar o teorema de Stokes para esse cálculo uma vez que o campo F possue derivadas parciais contínuas; e assim

$$\int_S \operatorname{rot}(F)\, dS = \int_C F\, dr,$$

onde C é a fronteira de S orientada como na letra b).

Daí,

$$\int_c F\, dr = \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}(t), \frac{3}{4} \cos(t) \operatorname{sen}(t)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(t), \frac{-\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}(t), 0\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{3}{4} \operatorname{sen}^2(t)\, dt = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt$$

$$= \frac{-3}{8} \left(t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-3}{4}\pi$$

3) Considere a série de Potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n .$$

a) Determine o raio e o intervalo de convergência dessa série.

Vamos usar o teste da raiz.

$$\lim \left| \frac{(n+1) x^{n+1}}{n x^n} \right| = \lim \frac{n+1}{n} \cdot |x| = |x| .$$

Daí o raio de convergência é $R = 1$.

Para $x = 1$, a série fica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n (1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n ,$$

que é divergente pelo teste da divergencia.

Para $x = -1$, a série fica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n (-1)^n ,$$

que tambem é divergente pelo teste da divergência. Então o intervalo é $(-1, 1)$.

b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ é a série de Mac-Laurin de qual função?

Lembrando que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ quando $|x| < 1$ e derivando obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Daí $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$

c) Use o item anterior para calcular o valor da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-3)^{2n+1}}{4^{3+2n}}.$$

Então,

$$\sum_{n=1} n\left(\frac{-3}{4^3}\right)\cdot\left(\frac{(-3)^2}{4^2}\right)^n = \frac{-3}{4^3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{9}{16}\right)^n =$$

$$= \frac{-3}{4^3}\cdot\frac{9/16}{\left(1-\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{-3}{4^3}\,\frac{9/16}{\frac{7^2}{16^2}} =$$

$$= \frac{-27}{196}$$

(7)