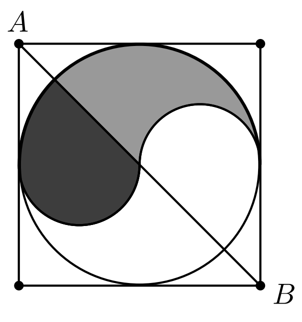
VII Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether 2017
Primeira Etapa

Sábado, 1 de abril de 2017

Bem-vindo à Primeira Etapa do VII Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether

- **Resolva a prova na folha de respostas anexa. Cada resposta correta vale um ponto.**
- **Você tem 3 horas para resolver a prova.**
- **Lembre-se que não se pode usar calculadoras, telefones celulares, tabelas, livros, anotações, etc.**
- **Não se pode comentar nem divulgar a prova até o dia 7 de abril.**

1. Considere a figura do Ying Yang, a qual é formada por um círculo grande de raio 1, e dois círculos tangentes de diâmetro 1. A diagonal AB do quadrado divide a região escura em duas regiões. Qual é a área da região escura inferior?



(a) $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{5}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

2. Qual é o menor n para o qual qualquer matriz A $m \times m$ com entradas reais possa ser escrita como soma de n matrizes distintas de posto 1?

(a) m (b) $m+1$ (c) $m-1$ (d) há matrizes para as quais isso não é possível

3. Para cada $i \geq 2$ inteiro positivo, denotamos por p_i o maior número de Fibonacci p tal que $p \leq i$ e por q_i o menor número de Fibonacci q tal que $i < q$. Qual é o valor da série $\sum_{i \geq 2} \frac{1}{p_i q_i}$?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{6}{\pi^2}$ (d) 1

4. Sejam C_1 e C_2 os gráficos de dois polinômios cúbicos em uma variável. Seja C_2' a curva que se obtém ao girar C_2 por un ângulo de 90 graus no sentido horário. Qual é o maior número possível de pontos de interseção de C_1 e C_2'?

   (a) 1 (b) 3 (c) 6 (d) 9

5. Um relógio está quebrado de modo que se o ponteiro dos minutos marca x minutos, então o ponteiro gira a $x+1$ voltas por hora. Sabendo que o ponteiro começa marcando 0, em qual dos seguintes intervalos está o número de minutos que o ponteiro leva para dar uma volta?

   (a) [30,60] (b) [10,15] (c) [4,8] (d) [1,3]

6. Para um número natural n, denotamos por $\phi(n)$ a quantidade de números coprimos com n no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Quantos pares de inteiros positivos (n, m) satisfazem

$$\phi(nm) = \phi(n) + \phi(m)?$$

   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) infinitos

7. Quantos valores inteiros de x no intervalo $[1, 100]$ fazem com que o determinante da seguinte matriz seja múltiplo de 3?

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & (x+2) \end{pmatrix}$$

   (a) 0 (b) 34 (c) 67 (d) 100

8. Qual dos seguintes números complexos está mais longe do zero?

   (a) $(1+i)^5$ (b) $(1+2i)^4$ (c) $(1+3i)^3$ (d) $(1+4i)^2$

9. Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt$. A função $h_{a,b}$ é definida como $h_{a,b}(x) = af(x)$ se $x < 0$ e $h_{a,b}(x) = bg(x)$ se $x \geq 0$. Qual é a cardinalidade do conjunto $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid h_{a,b} \text{ é função contínua}\}$?

   (a) 0 (b) 1 (c) $|\mathbb{N}|$ (d) $|\mathbb{R}|$

10. Para cada par de números inteiros m, n denotemos por (m, n) o máximo divisor comum de m e n. Se $n \geq 2$, qual é o valor de $\sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{1}{(n,j)} \right\rfloor$?

    (a) 1 (b) $\phi(n)$ (c) n (d) $\frac{n}{\phi(n)}$

11. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ os vértices de um 12-ágono regular de lado 1. Em cada semirreta P_iP_{i+1} marca-se um ponto Q_i com $P_iQ_i = 3$. Qual é a maior quantidade possível de segmentos P_iQ_i que podem ter interseção não-vazia com uma mesma linha reta?

    (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

12. Em quantas regiões fica dividido o espaço quando se desenham 4 planos que passam por um mesmo ponto, mas não há três desses planos que contenham uma mesma reta?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16

13. Seja $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as matrizes 4×4 com entradas reais. Chamemos de $\mathcal{V}$ o subespaço gerado pelo conjunto

$$\{AB - BA \mid A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})\}$$

Qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?

(a) 16 (b) 15 (c) 12 (d) 1

14. Toma-se um número α aleatória e uniformemente no intervalo $[0, 60]$. Qual é a probabilidade de que a integral $\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi\alpha}{60}\right) dx$ seja maior que $\sqrt{3}$?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{\pi}$ (d) $\frac{5}{6}$

15. Em uma festa se sabe que cada pessoa tem três amigos, mas que não há três pessoas que sejam amigas duas a duas. Qual é a menor quantidade possível de pessoas na festa?

(a) 4 (b) 6 (c) 7 (d) 8

16. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 2$ e $f(xy) = f(x) - \frac{f(-y)}{x}, \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

17. Qual é o valor de $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2-n}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right)$?

(a) 1 (b) $3\sqrt{2} - 1$ (c) $\sqrt{\log 2}$ (d) $2(\sqrt{2} - 1)$

18. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$

$$S = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m \text{ e } n \text{ são inteiros não negativos}\}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) O fecho de S é um conjunto aberto (b) O complementar de S tem interior não vazio
(c) S tem interior não vazio (d) Todas as afirmações anteriores são falsas

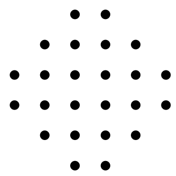
19. Quantos vetores há em $(\mathbb{Z}_3)^7$ que tenham uma quantidade par de zeros?

(a) 1094 (b) 1108 (c) 739 (d) $\binom{7}{3}$

20. O grupo cíclico $\mathbb{Z}_{120}$ tem um único subgrupo G con dois elementos e um único subgrupo H de índice 2. Quantos subgrupos de $\mathbb{Z}_{120}$ contêm G e estão contidos em H?

(a) 6 (b) 8 (c) 16 (d) 20

21. Quantos quadrados podem ser formados com vértices nos pontos do seguinte desenho?



(a) 18 (b) 34 (c) 44 (d) 46

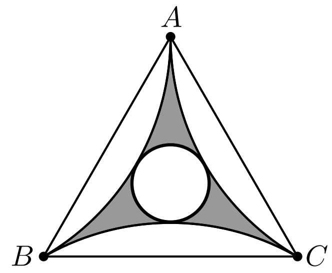
22. Deseja-se dividir um triângulo obtuso em triângulos acutângulos. Qual é o número mínimo necessário de triângulos acutângulos para que seja possível fazer essa divisão?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) ∞

23. Deseja-se colorir cada um dos números de 1 a 10 com as cores vermelho, azul ou verde de maneira que se a, b são tais que $a - b$ é ímpar, então a e b têm cores distintas. De quantas maneiras se pode fazer a coloração?

(a) 10 (b) 96 (c) 186 (d) Não existe uma coloração assim

24. Na seguinte figura o triângulo ABC é equilátero de lado 1, os arcos pertencem a circunferências de raio 1 e a circunferência pequena é tangente aos três arcos. Qual é o valor da área sombreada?



(a) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{16}$ (b) $\frac{\sqrt{3}(4-\pi)}{17}$ (c) $\frac{1}{6}\pi + \frac{(4\sqrt{3}-13)}{18}$ (d) $\sqrt{3}(\frac{4}{3}\pi + 1) - \frac{17}{6}\pi$

25. Evariste Galois, Pescheux d'Hebinville e Ernest Duchâlet disputaram um duelo até a morte seguindo as seguintes regras. Primeiro sortearão quem atira primeiro, quem em segundo e quem em terceiro lugar. A seguir ocuparão seus lugares nos vértices de um triângulo equilátero, seguindo a ordem previamente escolhida, cada um escolherá um alvo e atirará uma vez até que só haja um sobrevivente. É conhecido por todos que Galois sempre acerta seu alvo; já d'Hebinville acerta 80 por cento das vezes e Duchâlet somente 50 por cento. Durante o duelo, cada um seguirá a melhor estratégia para si mesmo (podendo atirar para o ar) e ninguém morrerá de uma bala perdida. Que probabilidade tem Galois de sobreviver ao duelo?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{3}{4}$

VII Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether 2017
Segunda Etapa

Sábado, 17 de junho de 2017

Bem-vindo à Segunda Etapa do Concurso Universitário de Matemáticas Galois-Noether.

Imagem de fractal por Jock Cooper (goo.gl/8722Y0) - CC BY-NC 3.0

Instruções

- Leia com cuidado estas instruções antes de começar a prova.
- Em cada folha, no canto superior direito, você deve indicar seu nome (ou iniciais), o número do problema no qual você está trabalhando e o número da folha.
- Responda as perguntas justificando cada um de seus passos. Cada problema vale 10 pontos e serão dados pontos parciais por progressos na direção da solução do problema.
- Lembre-se de que não se pode usar calculadoras, telefones celulares, tabelas, livros, anotações, etc.
- Você tem meia hora para fazer perguntas sobre as redações dos problemas e para pedir a definição de algum conceito que você não entenda.
- Você tem 4 horas e meia para fazer a prova.
- Os resultados serão divulgados nas semanas seguintes por e-mail.
- Os problemas desta prova são confidenciais até 19 de junho de 2017.

Problemas

1. (10 pontos) Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaz:

   (a) $a_1 = 1$

   (b) a_i, a_{i+1}, a_{i+2} estão em progressão geométrica ou em progressão aritmética se i é ímpar ou par, respectivamente.

   Encontre os valores de a_2 para os quais $a_{2017} = 1009^2$.

2. (10 pontos) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno. Prove que se existe um automorfismo anti-simétrico (quer dizer, $A : V \to V$ linear, bijetivo e para o qual $\langle A(x), y\rangle = -\langle x, A(y)\rangle$ para quaisquer $x, y \in V$), então a dimensão de V é par.

3. (10 pontos) Seja $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ uma função crescente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $P_n = \{0 = t_{n0} < t_{n1} < ... < t_{nn} = 1\}$ a partição de $[0, 1]$ para a qual

$$\int_{t_{ni-1}}^{t_{ni}} f = \frac{1}{n} \int_0^1 f.$$

   Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, calcule o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{ni}}{t_{n1}}.$$

4. (10 pontos) Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é 2017-*amigável* se é possível encontrar um inteiro n tal que cada um dos números de 1 a 2017 apareça em $f(n)$ como *subnúmeros*, quer dizer, como números formados por uma subsequência de dígitos consecutivos que não comeşe com zero. Por exemplo, os subnúmeros de 1103 são $1, 3, 10, 11, 103, 110, 1103$.

   - Mostre que $f(n) = 2017n$ é 2017-amigável.
   - Mostre que $f(n) = (2017n)^{2017}$ é 2017-amigável.

5. (10 pontos) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a seguinte equação

$$f(x - 1)f(y) = f(y - 1)f(x) + 2(xy - 1)(x - y)$$

   para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

6. (10 pontos) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ temos

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|.$$

   Prove que para cada $\epsilon > 0$ existe uma família $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ de retângulos com lados de medidas $a_i \le b_i$ que cobrem o gráfico de f tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \epsilon.$$

   Nota. Os retângulos não necessariamente têm lados paralelos aos eixos.