Terça-feira, 18 de Julho de 2017

Problema 1. Para cada inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência a_0, a_1, a_2, $\ldots$ tal que, para cada $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro,} \\ a_n + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Problema 2. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer números reais x e y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Um coelho invisível e um caçador jogam da seguinte forma no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do coelho e o ponto de partida B_0 do caçador são iguais. Depois de $n-1$ rodadas do jogo, o coelho encontra-se no ponto A_{n-1} e o caçador encontra-se no ponto B_{n-1}. Na n-ésima rodada do jogo, ocorrem três coisas na seguinte ordem:

(i) O coelho move-se de forma invisível para um ponto A_n tal que a distância entre A_{n-1} e A_n é exatamente 1.

(ii) Um aparelho de localização informa um ponto P_n ao caçador. A única informação garantida pelo aparelho ao caçador é que a distância entre P_n e A_n é menor ou igual a 1.

(iii) O caçador move-se de forma visível para um ponto B_n tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é exatamente 1.

É sempre possível que, qualquer que seja a maneira em que se mova o coelho e quaisquer que sejam os pontos informados pelo aparelho de localização, o caçador possa escolher os seus movimentos de modo que depois de 10^9 rodadas o caçador possa garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual que 100?

Quarta-feira, 19 de Julho de 2017

Problema 4. Sejam R e S pontos distintos sobre a circunferência Ω tais que RS não é um diâmetro de Ω. Seja ℓ a reta tangente a Ω em R. O ponto T é tal que S é o ponto médio do segmento RT. O ponto J escolhe-se no menor arco RS de Ω de maneira que Γ, a circunferência circunscrita ao triângulo JST, interseta ℓ em dois pontos distintos. Seja A o ponto comum de Γ e ℓ mais próximo de R. A reta AJ interseta pela segunda vez Ω em K. Demonstre que a reta KT é tangente a Γ.

Problema 5. Seja $N \geqslant 2$ um inteiro dado. Um conjunto de $N(N+1)$ jogadores de futebol, todos de diferentes alturas, colocam-se em fila. O treinador deseja retirar $N(N-1)$ jogadores desta fila, de modo que a fila que sobra formada pelos $2N$ jogadores restantes satisfaça as N condições seguintes:

(1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos.

(2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto.

$\vdots$

(N) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais baixos.

Demonstre que isto é sempre possível.

Problema 6. Um par ordenado (x, y) de inteiros é *um ponto primitivo* se o máximo divisor comum entre x e y é 1. Dado um conjunto finito S de pontos primitivos, demonstre que existem um inteiro positivo n e inteiros a_0, a_1, $\ldots$, a_n tais que, para cada (x, y) de S, se verifica:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$