TÉCNICA DA TANGENTE

THIAGO LANDIM
ESCOLA OLÍMPICA

Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics.
Siméon Poisson

Iremos, nesse artigo, mostrar uma técnica elementar de calcular algumas integrais definidas e indefinidas que, de forma geral, são sempre, ou quase sempre, aplicáveis para integrais da forma dada.

O método é simples:

Ao aparecer um $x^2 + 1$ no denominador do integrando, tomamos a substituição $\tan\theta = x$. Faremos isso, pois teremos que $\theta = \arctan(x)$ e, portanto, $d\theta = dx/(x^2+1)$. Como tangente irá substituir o x, os casos aplicáveis são integrandos cujos numeradores são logaritmos ou polinômios.

O resto do documento será dedicado a aplicar o método em exemplos variados.

Exemplo 1.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$$

Com a substituição $\tan\theta = x$*, temos que :*

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \log(\tan\theta)\,d\theta.$$

Agora, fazendo a substituição $\alpha = \pi/2 - \theta$*, veja que*

$$\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \log(\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Portanto

$$\int_0^{\pi/2} \log(\tan\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta - \int_0^{\pi/2} \log(\cos\theta)\,d\theta = 0.$$

Obs.: Há um truque que resolve ainda mais rápido que o nosso método, a substituição $u = 1/x$*, mas iremos nos prender ao nosso método.*

O problema seguinte foi proposto pelo T. Andreescu para a Putnam de 2005. O link [9] possui 5 soluções distintas deste problema, da qual a nossa é semelhante à primeira e a mesma do Titu Andreescu [3].

Exemplo 2.

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \log 2}{8}$$

Denotemos por I a integral dada. Fazendo a substituição, teremos

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\,d\theta.$$

Agora fazemos $\alpha = \pi/4 - \theta$.

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right) d\alpha = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan\alpha}\right) d\alpha.$$

Logo

$$I = \frac{\pi \log 2}{4} - I.$$

Ou seja,

$$I = \frac{\pi \log 2}{8}.$$

Exemplo 3.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{\log 2}{2}$$

Tomando novamente $\tan\theta = x$, teremos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$$

$$= \log(\operatorname{sen}(\pi/2)) - \log(\operatorname{sen}(\pi/4)) = \frac{\log 2}{2}.$$

Exemplo 4.

$$\int_0^\infty \frac{\log(x+1/x)}{x^2+1}\,dx = \pi \log 2$$

Se tomarmos $\tan\theta = x$, então teremos

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi \log 2}{2} - \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} 2\theta)\,d\theta.$$

Substituindo $\alpha = 2\theta$ e usando que $\int_0^\pi \log(\operatorname{sen}\alpha)\,d\alpha = -\pi\log 2$, o resultado segue.

O truque pode ser usado mesmo quando o quociente não é inteiramente cancelado, como nos mostram os seguintes exemplos.

Exemplo 5.
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\pi/4$$

Usar $\tan\theta = x$ *nos dá*
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \log(\tan\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \log(\tan\theta)\, d\theta.$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \log(\tan\theta)\, d\theta$$

Pois $\int_0^{\pi/2} \log(\tan\theta)\, d\theta = 0$*, como já vimos. Agora, usando a regra do produto com* $dv = \cos 2\theta\, d\theta$ *e* $u = \log(\tan\theta)$*, teremos* $v = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$ *e* $du = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\theta}\, d\theta$*. Então*
$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \log(\tan\theta)\, d\theta = \left.\frac{\operatorname{sen} 2\theta \log(\tan\theta)}{2}\right|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 d\theta$$

Portanto, usando L'Hôpital, temos que
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Exemplo 6.
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1/x)^2}\, dx = \pi/4$$

Essa integral é igual a
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

E, por fim, podemos usá-lo também para resolver algumas integrais indefinidas, como é o caso dos próximos exemplos. Ambos os exemplos são da MIT Integration Bee, o aluno interessado pode conferir [5] e [7].

Exemplo 7.
$$\int \frac{x}{1-x^4}\, dx$$

De início, não vemos como aplicar o truque, mas se fatorarmos o denominador, teremos $1 - x^4 = (1+x^2)(1-x^2)$*, e tomando* $\tan\theta = x$*, temos*
$$\int \frac{x}{1-x^4}\, dx = \int \frac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\, d\theta$$
$$= \int \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\log|\cos 2\theta|\, d\theta.$$

Como $\tan\theta = x$, *sabemos que* $\cos\theta = 1/\sqrt{1+x^2}$ *e*

$$\cos 2\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Portanto

$$\int \frac{x}{1-x^4}\, dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|.$$

Obs.: Essa integral pode ser calculada mais facilmente se percebermos que

$$\frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\Big).$$

Exemplo 8.

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$$

Tomando, novamente, $\tan\theta = x$, *ficamos com*

$$\int \tan^3\theta\, d\theta,$$

e, como $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, *a integral torna-se*

$$\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta - \int \tan\theta\, d\theta.$$

A primeira integral é

$$\frac{\tan^2\theta}{2} = \frac{x^2}{2},$$

enquanto a segunda,

$$-\log(\cos\theta) = \frac{\log(x^2+1)}{2}.$$

Portanto

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\log(x^2+1)}{2}.$$

Obs.: Essa integral poderia ter sido calculada mais facilmente somando e subtraindo

$$\frac{x}{x^2+1}.$$

Os seguintes problemas são reservados ao leitor.

1. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx$$

onde a é uma constante positiva.

2. Encontre
$$\int \frac{1}{1-x+x^2-x^3}\,dx.$$

3. Mostre que
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\,dx$$
independe do a real e encontre seu valor.

4. Encontre uma fórmula fechada para a seguinte antiderivada
$$\int \frac{\log x}{(x+1/x)^n}\,dx$$
onde n é um inteiro ímpar.

5. Calcule
$$\int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\log\left(\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right)dx.$$

Apêndice

Uma integral ignorada.
Nesse apêndice, iremos calcular a integral

$$\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = -\pi \log 2$$

usada em um dos exemplos.

Denotemos por I a integral. Como $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$,

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

Além disso, $\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$ implica que

$$\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \log(\cos\theta)\, d\theta.$$

Logo

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \log(\cos\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} 2\theta)\, d\theta - \frac{\pi \log 2}{2}.$$

E fazendo a substituição $\alpha = 2\theta$, teremos que

$$I = I/2 - \frac{\pi \log 2}{2}.$$

Ou seja,

$$I = -\pi \log 2.$$

Como fazer aparecer o $1 + x^2$.
No Exemplo 4, fizemos aparecer um $1+x^2$ no denominador fazendo uma fatoração muito conhecida, mas será que há outras formas de fazê-lo aparecer?

A resposta é positiva, e o caso em que é possível fazê-lo aparecer é o seguinte:

$$\int \frac{f(x)}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{\mu}}\, dx$$

com $\beta \neq 0$.

Pois, se tomarmos $x = \alpha + \beta t$, teremos

$$\beta^{1-2\mu} \int \frac{f(\alpha + \beta t)}{(1+t^2)^{\mu}}\, dt.$$

É claro, quanto mais complicada a f, mais complicado será calcular a integral utilizando a técnica da tangente.

Referências

[1] Arora, A. K.; Goel, S. K.; e Rodriguez, D. M.. Special Integration Techniques for Trigonometric Integrals, *American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No. 2 (1988) pp. 126-130.

[2] Jordan, C.. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome 2, Gauthier-Villars, 1893.

[3] Andreescu, T.; e Gelca, R.. *Putnam and Beyond*, Springer, 2017.

[4] de Souza, P.N.; Silva, J.N.. *Berkeley Problems in Mathematics*, Springer, 2004.

[5] MIT Integration Bee 2017 Qualifying Exam. `http://www.mit.edu/~same/pdf/qualifying_round_2017_test.pdf`

[6] MIT Integration Bee 2016 Qualifying Exam. `http://www.mit.edu/~same/pdf/qualifying_round_2016_test.pdf`

[7] MIT Integration Bee 2013 Qualifying Exam. `http://www.mit.edu/~same/pdf/qualifying_round_2013_test.pdf`

[8] 66th W.L. Putnam Mathematical Competition, 2005. `http://kskedlaya.org/putnam-archive/2005.pdf`

[9] Solutions to the 66th W.L. Putnam Mathematical Competition, 2005. `http://kskedlaya.org/putnam-archive/2005s.pdf`