O Teorema de Kronecker

Samuel Barbosa

Leopold Kronecker foi um matemático do século XIX que realizou importantes contribuições em Teoria dos Números e Análise. Comecemos com um problema que nos servirá de motivação:

Exercício 1. *(Olimpíada Russa) Prove que para qualquer natural $a > 1$ com $mdc(a, 10) = 1$ e qualquer sequência de dígitos $M = (a_1a_2 \dots a_k)$, existe um inteiro n tal que os primeiros dígitos à esquerda do número a^n são $(a_1a_2 \dots a_k)$.*

Tentaremos agora desenvolver ferramentas para atacar nosso problema.

Exercício 2. *Se ξ é um número irracional então existem infinitos números racionais x/y , com $mdc(x, y) = 1$ tais que $|\xi - x/y| < 1/y^2$*

Dica: Particione o intervalo $[0, 1)$ como $[0, 1/n)\cup[1/n, 2/n) \dots \cup [(n-1)/n, 1)$. Considere os números $0, \{\xi\}, \{2\xi\}, \dots, \{n\xi\}$[1]. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, dois deles devem estar em um mesmo intervalo. Obtenha com isso, x e y tais que $|\xi - x/y| < 1/ny$ e $y < n$. Use o fato que n foi escolhido arbitrariamente e conclua o exercício.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X. Por exemplo, os números racionais são densos em $\mathbb{R}$ (assim como os irracionais).

Exercício 3. *Dado um número natural $p > 1$, mostre que $X = \{m/p^n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Mas existem muitos outros exemplos, como mostra a próxima proposição:

Proposição 1. *(Kronecker) Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então $X = \{m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Prova. *Suponhamos $(a, b) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Pelo exercício 2, existem p, q inteiros com $q > 1/\epsilon$ tais que $|\alpha - p/q| < 1/q^2 \Rightarrow 0 < |q\alpha - p| < 1/q < \epsilon$. Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que x está entre $k(q\alpha - p)$ e $(k + 1)(q\alpha - p)$, donde $|x - k(q\alpha - p)| < \epsilon$. Então o intervalo aberto $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ contém o ponto $kq\alpha - kp$ de X.*

Exercício 4. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, mostre que o conjunto $Y = \{n - m\alpha \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $(0, +\infty)$.*

Agora podemos resolver o problema inicial:

[1] $\{x\}$ denota a parte fracionária de x

Solução. *Considere $\alpha = log_a 10$. Se $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^p = 10^q$. Isto é um absurdo pois $mdc(a, 10) = 1$. Logo α e irracional. Queremos garantir a existência de naturais n e m tais que $M.10^m < a^n < (M + 1).10^m \Leftrightarrow log_a M < n - mlog_a 10 < log_a(M + 1)$. Pelo exercício 4, existe um elemento de $Y = \{n - m\alpha \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ no intervalo aberto $(log_a M, log_a(M + 1))$. Isto garante a existência.*

Exercício 5. *(Teste de Seleção para IMO-Romênia) Considere a sequência definida por $a_n = \lfloor n\sqrt{2003}\rfloor$ para $n \geq 1$. Prove que, para quaisquer inteiros positivos m e p, a sequência contém m elementos em uma progressão geométrica de razão maior que p.*

Solução. *Considere o irracional $\alpha = \sqrt{2003}$. Dado o inteiro positivo k, como $Y = \{m\alpha - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$[2] é denso em $(0, +\infty)$, considerando o intervalo $(0, 1/2^{k+1})$, existem inteiros positivos m e n tais que $m\alpha = n + \beta_n$ com $0 < \beta_n < 1/2^{k+1}$. Assim, $\lfloor 2^l m\alpha\rfloor = 2^l\lfloor m\alpha\rfloor$ para $l = 0, 1, \dots, k$. Então a subsequência $b_l = a_{2^l m\sqrt{2003}}$ para $l = 0, 1, \dots, k$ é uma progressão geométrica de razão 2 com m termos. Para obtermos progressões maiores, basta considerarmos uma subprogressão dos b_l com razão $2^r > p$, isto é possível pois k pode assumir valores arbitrários.*

Exercício 6. *(Olimpíada Brasileira) Prove que existe um natural n tal que a expansão decimal de n^{1992} começa com 1992 algarismos iguais a 1.*

Exercício 7. *(OBMU) Seja ϵ um número real positivo arbitrário. Com centro em todos os pontos do plano com coordenadas inteiras, traça-se um círculo de raio ϵ . Prove que toda reta passando pela origem intercepta uma infinidade desses círculos.*

Proposição 2. *(Versão Geral do Teorema de Kronecker) Seja $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então $X = \{k\alpha + m_1e_1 + m_2e_2 + \dots m_ne_n \mid k, m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\}$[3] é denso em $\mathbb{R}^n$.*

Exercício 8. *Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que 2^n e 3^n começam com a mesma sequência $M = (a_1a_2 \dots a_k)$ de dígitos.*

Referências:

[1] C.G Moreira, Introdução à Teoria do Números, IMCA

[2] Olimpíadas Brasileiras de Matemática 9 a 16.

[2] este fato é análgo ao exercício 4

[3] os e_i são a base canônica do $\mathbb{R}^n$