Medida e Integração Lista 1 (2018.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Medida de Lebesgue (capítulos 11-16)

1. Sejam $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ com $m(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que
$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 0.$$

2. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, mostre que $m(\{p\}) = 0$. Conclua que todo subconjunto enumerável $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue nula.

3. Mostre que todo aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue positiva.

4. Sejam $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in [0, 1]$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$.

5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f, g : U \to \mathbb{R}^k$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in U$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$.

6. A diferença simétrica entre E e F é o conjunto definido por
$$E\Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$
Sejam E e F dois conjuntos mensuráveis tais que $m(E) = m(F) < \infty$ e $m(E-F) = 0$. Prove que $m(E\Delta F) = 0$.

7. Sejam m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e μ uma medida Boreliana em $\mathbb{R}^n$ invariante por translações, isto é, $\mu(b + A) = \mu(A)$ para todo A boreliano e para todo $b \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(A) = c \cdot m(A)$ para todo A boreliano.

8. Dado $\alpha \in (0, 1)$, construa um conjunto $K \subset [0, 1]$ com interior vazio e medida de Lebesgue α.

   Sugestão: Modifique a construção do conjunto de Cantor, removendo na n-ésima etapa intervalos de comprimento $(1 - \alpha)3^{-n}$.

9. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ para a qual cada conjunto $X_c = \{x \in [0, 1] | f(x) \leq c\}$ tem medida de Lebesgue 0 ou 1. Prove que existe c_0 tal que $f(x) = c_0$ para quase todo $x \in [0, 1]$.

   Sugestão: Tome $c_0 = \inf\{c, m(X_c) = 1\}$.

10. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1, $n \geq 2$. Prove que $\gamma([a, b])$ tem medida nula.

    Sugestão: Quantas bolas de raio ϵ são necessárias para cobrir a curva?

11. No plano cartesiano, seja $\mathcal{S}$ o conjunto das circunferências com centros de coordenadas racionais e com raios de comprimentos racionais. Mostre que existe um polígono regular de 2018 lados, cujos vértices não pertencem a $\mathcal{S}$.

    Sugestão: Verifique que $\mathcal{S}$ tem medida nula.