Dinâmica Hiperbólica - Lista 1 (2019.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Em toda a lista, M é uma variedade compacta e $\mathrm{Diff}^r(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de M munido da topologia C^r, $r \geq 1$.

1. Suponha que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um ponto fixo hiperbólico x_0. Exiba uma conjugação afim entre T e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possui 0 como ponto fixo hiperbólico de mesmo índice.

2. Considere um isomorfismo linear $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ que não é hiperbólico. Então para todo ϵ existe um isomorfismo B com $\|B - A\| < \epsilon$ tal que A e B não são localmente conjugados.

   Dica: Considere B com índice diferente de A. Você pode usar, sem demonstrar, que se $h : U \subset E \to V \subset F$ é um homeomofismo entre abertos de dois espaços vetoriais de dimensão finita então $\dim E = \dim V$.

3. Seja p um ponto fixo hiperbólico para $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$. Prove que:

   a) $T_pM = E^s$ se, e somente se, $W^s(p)$ é um aberto contendo p e $W^u(p) = \{p\}$.

   b) $T_pM = E^u$ se, e somente se, $W^s(p) = \{p\}$ e $W^u(p)$ é um aberto contendo p.

4. Seja A um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$. Prove que A é hiperbólico se e somente para todo $x \in \mathbb{R}^n$ é valido que $\omega(x) = \{0\}$ ou $\omega(x) = \emptyset$.

5. a) Se $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ é C^1-estruturalmente estável então todos os pontos fixos de f são hiperbólicos.

   b) Se $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ é C^1-estruturalmente estável então todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos.

6. Se $p \in M$ é um ponto periódico hiperbólico de f, então para todo $N \in \mathbb{N}$ existe uma vizinhança V de p tal que todo ponto periódico de f em $V - \{p\}$ tem período maior que N.

7. Considere o mapa de Hénon $F_{a,b}(x, y) = (a - by - x^2, x)$. Encontre os pontos fixos e classifique-os (determinando se são hiperbólicos e qual o índice) conforme os diferentes parâmetros a, b.

8. a) Prove que o conjunto dos difeomorfismos cujos pontos fixos são todos hiperbólicos é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^r(M)$.

   b) Prove que o conjunto dos difeomorfismos cujos pontos periódicos de período menor ou igual a n são todos hiperbólicos é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^r(M)$.

   c) Prove que o conjunto dos difeomorfismos cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos é residual em $\mathrm{Diff}^r(M)$.

9. Dados $n \geq 1$ e $\epsilon < \frac{1}{2\pi n}$, considere $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e a dinâmica $T : S^1 \to S^1$ dada por

$$T(x) = x + \epsilon \sin(2\pi n x).$$

Verifique que T é um difeomorfismo de Morse-Smale, determinando seus pontos periódicos com seu correspondente tipo de estabilidade (ie, se os pontos periódicos são atratores ou repulsores). Descreva também a dinâmica dos pontos $x \in S^1$.

10. Dada $T : I \subset \mathbb{R} \to I$ de classe C^1, o *expoente de Lyapunov de* $x_0 \in I$ é definido por

$$\lambda(x_0) := \limsup_{n \to \to} \frac{1}{n} \log |(T^n)'(x_0)|.$$

a) Prove que $\lambda(x_0) = \limsup_{n \to \to} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |T'(T^j(x_0))|$.

b) Considere o mapa tenda $T : [0,1] \to [0,1]$ dado por $T(x) = 2x$ se $x \in [0,1/2]$ e $T(x) = 2 - 2x$ se $x \in [1/2,1]$. Prove que se $T^j(x_0)$ nunca é igual a $1/2$, então $\lambda(x) = \log 2$. Daí segue que $\lambda(x) = \log 2$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in [0,1]$.

c) Considere o mapa $F_4 : [0,1] \to [0,1]$ dado por $F_4(x) = 4x(1-x)$, prove que $\lambda(x) = \log 2$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in [0,1]$.