

Medida e Integração Lista 1 (2017.2)
Prof. Ricardo Bortolotti

Medida de Lebesgue (capítulos 11-16)

1. Mostre que todo aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue positiva.
2. Sejam $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in [0, 1]$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$.
3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in U$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$.
4. A diferença simétrica entre E e F é o conjunto definido por

$$E\Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$

Sejam E e F dois conjuntos mensuráveis tais que $m(E) = m(F) < \infty$ e $m(E - F) = 0$. Prove que $m(E\Delta F) = 0$.

5. Sejam m a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n e μ uma medida Boreliana em \mathbb{R}^n invariante por translações, isto é, $\mu(b + A) = \mu(A)$ para todo A boreliano e para todo $b \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(A) = c \cdot m(A)$ para todo A boreliano.
6. Dado $\alpha \in (0, 1)$, construa um conjunto $K \subset [0, 1]$ com interior vazio e medida de Lebesgue α .

Sugestão: Modifique a construção do conjunto de Cantor, removendo na n -ésima etapa intervalos de comprimento $(1 - \alpha)3^{-n}$.

7. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual cada conjunto $X_c = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq c\}$ tem medida de Lebesgue 0 ou 1. Prove que existe c_0 tal que $f(x) = c_0$ para quase todo $x \in [0, 1]$.
Sugestão: Tome $c_0 = \inf\{c, m(X_c) = 0\}$.

8. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 . Prove que $\gamma([a, b])$ tem medida nula.
Sugestão: Quantas bolas de raio ϵ são necessárias para cobrir a curva?

9. No plano cartesiano, seja \mathcal{S} o conjunto das circunferências com centros de coordenadas racionais e com raios de comprimentos racionais. Mostre que existe um polígono regular de 2017 lados, cujos vértices não pertencem a \mathcal{S} .

Sugestão: Verifique que \mathcal{S} tem medida nula.