LISTA 1 - CÁLCULO 3, 2016.1
TURMAS T1 E T6 (PROF RICARDO)

Atualizado em: March 21, 2016. Caso encontre erros, favor escrever para ricardo@dmat.ufpe.br.

Curvas parametrizadas:

Exercício 1. Determine uma parametrização da curva C dada pela interseção das superfícies S_1 e S_2 em cada caso:
a) $S_1 : x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad S_2 : y + z = \log(x)$;
b) $S_1 : z = e^x + 4x^2 + 9y^2 \quad , \quad S_2 : y = x^2$;
c) $S_1 : z = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2 : z = 4y$;
d) $S_1 : y^2 + z^2 = 9 \quad , \quad S_2 : 4x + y^2 - z^2 = 0$.

Exercício 2. Em cada item abaixo, determine: o vetor tangente, o comprimento da curva, a função comprimento de arco e reparametrize a função vetorial pelo comprimento de arco.
a) $\overrightarrow{r}(t) = (4cos(3t), 4sen(3t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
b) $\overrightarrow{r}(t) = (t^2, sent - tcost, cost + tsent)$, $0 \leq t \leq \pi$;
c) $\overrightarrow{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$;
d) $\overrightarrow{r}(t) = (12t, 8t^{3/2}, -3t^2)$, $0 \leq t \leq 1$;
e) $\overrightarrow{r}(t) = (2t^{\frac{3}{2}}, cos(2t), sen(2t))$, $0 \leq t \leq 1$.

Exercício 3. Considere a curva parametrizada $\overrightarrow{r}(t) = (2e^t cost, 2e^t sint, e^t)$.
a) Determine o vetor tangente a curva.
b) Determine a função comprimento de arco $s(t)$ quando o parâmetro toma valores entre 0 e t.
c) Reparametrize a curva com o comprimento do arco como novo parâmetro.

Exercício 4. Considere a curva parametrizada $\overrightarrow{r}(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$.
a) Determine o vetor tangente a curva, e verifique que seu módulo é $\frac{2}{1+t^2}$
b) Determine a função comprimento de arco $s(t)$ quando o parâmetro toma valores entre 0 e t.
c) Reparametrize a curva com o comprimento do arco como novo parâmetro.

Exercício 5. Dê a equação da reta tangente a curva C no ponto P em cada item abaixo:
a) C dada pela parametrização $\overrightarrow{r}(t) = (t, \frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2+1}{2})$, $P = (1, 0, 1)$.
b) C é a elipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $P = (-\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2})$.

Exercício 6. Calcule o comprimento da curva dada pelo gráfico da função $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 1$.

Integrais de linha:

Exercício 7. Um arame fino tem a forma da parte do círculo de raio 3 com centro na origem que está no primero quadrante. Se a densidade for dada pela função $\rho(x, y) = 2xy$, calcule a massa e o centro de massa do arame.

Exercício 8. Um arame fino tem a forma da hélice circular $x = 2t$, $y = cost$, $z = sent$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Se a densidade for dada pela função $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcule a massa e o centro de massa do arame.

Exercício 9. Considere a curva obtida pela interseção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $z = 1 + y$, e C o arco da curva compreendido entre os pontos $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(1, 0, 1)$. Calcule $\int_C xds$.

Exercício 10. Faça um esboço, sem usar o computador, dos campos vetoriais abaixo, destacando o módulo, direção e sentido dos vetores:

a) $\overrightarrow{F}(x, y) = (x, y)$;
b) $\overrightarrow{F}(x, y) = (x^2, xy)$;
c) $\overrightarrow{F}(x, y) = (x, y^2)$
d) $\overrightarrow{F}(x, y) = (y, -x)$;
e) $\overrightarrow{F}(x, y) = (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}})$;
f) $\overrightarrow{F}(x, y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$;
g) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = -GM\frac{(x,y,z)}{||(x,y,z)||^3}$. (Campo gravitacional)

Exercício 11. Calcule $\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$ para $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ e C parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (2cost, 3sent, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercício 12. Calcule $\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$ para $\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}\frac{x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e C parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (t, 1)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Exercício 13. Calcule $\int_C 2ydx + zdy + xdz$, onde C é a interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, sendo o sentido do percurso de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$.

Exercício 14. Calcule o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}(x, y, z) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ no deslocamento de uma partícula de $\overrightarrow{r}(1)$ a $\overrightarrow{r}(2)$, sendo $\overrightarrow{r}(t) = (2t + 1, t - 1, t)$

Curiosidade:

Exercício 15. Diversos softwares, como o *Geogebra*, *Maxima*, *Wolfram*, *Matlab*, *Maple*, etc, permitem a visualização de curvas parametrizadas.

Há uma versão gratuita e online da função "parametric curve plotter" do *Wolfram Alpha* na página:
http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=ddaa2332531af389fba463a032fcec9d

Usando esta função, represente as curvas:

a) $(cost, sent, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; (círculo)
b) $(3cost, 2sen(t), 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; (elipse)
c) $(cost, sent, t)$, $0 \leq t \leq 8\pi$; (4 voltas da hélice circular)
d) $(tcost, tsent, 0)$, $0 \leq t \leq 10\pi$;
e) $(tcost, tsent, t)$, $0 \leq t \leq 10\pi$;
f) $(cost, sen^3t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

É possível plotar campos de vetores bidimensionais em:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=vector+field+plot

Plote os campos de vetores do Exercício 10 e confira se os esboços estão corretos.