Medida e Integração Lista 2 (2018.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Espaços mensuráveis, Espaços de medida, Integral de Lebesgue, Teoremas de Convergência, Espaços L^p (capítulos 2-6)

1. Exercício 2.M do Bartle.

2. Exercícios 3.A e 3.B do Bartle.

3. (Parte do exercícios 2.D,E,F,G,H e 3.I,J do Bartle) Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $\{A_n\}_{n\geq 1}$ pertencentes a $\mathcal{B}$, definimos

$$\limsup A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad \liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n.$$

   a) Mostre que $\liminf A_n$ e $\limsup A_n$ pertencem a $\mathcal{B}$.

   b) Mostre que $\emptyset \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset X$.

   c) Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, então $\liminf A_n = \limsup A_n$.

   d) Se $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, então $\liminf A_n = \limsup A_n$.

   e) Mostre que $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

   f) Mostre que $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n)$, quando $\mu(\bigcup_n A_n) < +\infty$.

4. (Lema de Borel-Cantelli) Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $\{A_n\}_{n\geq 1}$ pertencentes a $\mathcal{B}$ tais que $\sum \mu(A_n) < +\infty$, então $\mu(\limsup A_n) = 0$.

5. Exercícios 3.L e 3.M do Bartle.

6. Sejam $\mu, \nu : \Sigma \to [0, +\infty]$ duas medidas definidas na σ-álgebra Σ do conjunto X satisfazendo $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$.

   a) Prove que o conjunto
$$\mathcal{A} = \{A \in \Sigma | \mu(A) = \nu(A)\}$$
   é uma σ-álgebra.

   b) Supondo que Σ é gerada por um família $\mathcal{C}$, prove que $\mu = \nu$ se e somente se $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$.

7. (Desigualdade de Chebyshev) Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa integrável com respeito a uma medida finita μ, então para todo $a > 0$:
$$\mu\Big(\{x \in M, f(x) \geq a\}\Big) \leq \frac{1}{a} \int_M f d\mu.$$
   Utilizando a desigualdade acima, conclua que se $\int |f| d\mu = 0$, então $f = 0$ em μ-qtp.

8. Exercício 5.A do Bartle.

9. Exercício 5.Q do Bartle.

10. Sejam μ uma medida boreliana finita em $[0,1]$ e $F(t) = \int_0^1 e^{2\pi i t x} d\mu(x)$. Prove que F é de classe C^∞.

11. Calcule os seguintes limites: $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x/n)}{(1+(x/n))^n} dx$ e $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$.

12. (Caso particular do exercício 6.S ($f_n = f$ e $p = 1$)) Seja f uma função integrável num espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo conjunto mensurável E com $\mu(E) < \delta$ temos

$$\left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon.$$

Dica: Primeiro demonstre para funções simples e use um teorema de convergência.

13. Exercício 6.J do Bartle.

14. Exercício 6.K do Bartle.

15. Exercício 6.M do Bartle.

16. Exercício 6.V do Bartle.