

Análise no  $\mathbb{R}^n$  - Lista 2 (2021.2)  
Prof. Ricardo Bortolotti

Os exercícios do livro correspondem ao livro Análise Real, volume 2 - Elon Lages Lima (3ª edição).

**Capítulo 2: Caminhos em  $\mathbb{R}^n$**

1. Exercício 1 da Seção 1.
2. Exercício 1 da Seção 2.
3. Exercícios 1, 3 e 4 da Seção 3.
4. Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável e  $t_0 \in I$ , então  $f(t)$  pertence à esfera de centro  $a$  e raio  $r > 0$  se, e somente se,  $\|f(t_0) - a\| = r$  e  $f'(t)$  é ortogonal a  $f(t) - a$  para todo  $t \in I$ .  
*Dica:*  $g(t) = \|f(t) - a\|$  é constante se e somente se  $g'(t) = 0$ .
5. Prove que o caminho  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $f(0) = (0, 0)$  e  $f(t) = (t, t^2 \operatorname{sen}(1/t^2))$  é diferenciável porém não retificável.

*Dica:* Tome  $t_n$  e  $u_n$  tais que  $\operatorname{sen}(1/t_n^2) = 1$  e  $\operatorname{sen}(1/u_n^2) = 0$ , e considere a partição  $P = \{0 < u_n < t_n < u_{n-1} < t_{n-1} < \dots < u_1 < t_1 < 1\}$  de modo que

$$\ell(P) > \frac{1}{2\pi}(1 + 1/2 + \dots + 1/n).$$