Dinâmica Hiperbólica   Lista 2 (2019.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Em toda a lista, $f : M \to M$ é um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$, M é uma variedade Riemanniana compacta.

1. Mostre que a dinâmica do solenóide é transitiva. Mostre também que é topologicamente misturadora, que os pontos periódicos são densos e que a variedade instável de qualquer ponto do solenóide é densa no solenóide.

2. Se $L(f)$ é hiperbólico, então $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são variedades C^r imersas em M para todo $x \in M$.

3. Seja Λ um conjunto hiperbólico com decomposição $E^s \oplus E^u$. Seja $F^s \oplus F^u$ outra decomposição hiperbólica, mostre que $E^s = F^s$ e $E^u = F^u$.

4. Dê um exemplo de um conjunto hiperbólico que não possui estrutura de produto local.

5. Dê um exemplo de um conjunto hiperbólico Λ tal que os pontos periódicos de $f|_\Lambda$ não são densos nele.

6. Dê um exemplo de um conjunto hiperbólico sem pontos periódicos.

   Sugestão para os 3 problemas acima: Exiba tal exemplo como um subconjunto invariante do deslocamento de 2 *símbolos.*

7. Sejam $p_1, \cdots, p_k$ pontos periódicos hiperbólicos e $x \in W^s(p_1) \cap W^u(p_k)$. Se $W^u(p_i)$ intersecta transversalmente $W^s(p_{i+1})$ para $i = 1, 2, \cdots, k-1$, então $x \in \Omega(f)$.

8. (a) Mostre que $Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f)$.
   (b) Descreva exemplos onde as inclusões acima são estritas.
   (c) Mostre que $R(f)$ é fechado e invariante.
   (d) Mostre que se $R(f)$ é hiperbólico, então $\overline{Per(f)} = R(f)$.
   (e) Mostre que se Λ é hiperbólico isolado então $\overline{Per(f|_\Lambda)} = \Omega(f|_\Lambda) = R(f|_\Lambda)$.

9. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $L(x, y) = (2x, y/2)$. Tome uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável que vale 0 em $(-\infty, 1]$, $h'(x) > 0$ para $x \in (1, 3)$ e $h(2) > 2$. Considere o mapa
   $$g(x, y) = (x - h(x + y), y + h(x + y)).$$
   Existe interseção homoclnica entre $W^s(0)$ e $W^u(0)$ do mapa $f = g \circ L$? Transversal? Caso exista, desenhe mais pedaços das variedades invariantes (podem aparecer surpresas).