Medida e Integração Lista 2 (2017.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Espaços mensuráveis, Espaços de medida, Integral de Lebesgue, Teoremas de Convergência e Espaços L^p (capítulos 2-6)

1. Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $\{A_n\}_{n\geq 1}$ pertencentes a $\mathcal{B}$, definimos:

$$\limsup A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad \liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n$$

   a) Mostre que $\liminf A_n$ e $\limsup A_n$ pertencem a $\mathcal{B}$.

   b) Mostre que $\emptyset \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset X$.

   c) Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, então $\liminf A_n = \limsup A_n$.

   d) Se $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, então $\liminf A_n = \limsup A_n$.

   e) Mostre que $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

   f) Mostre que $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n)$, quando $\mu(\underset{n}{\cup} A_n) < +\infty$.

   Obs: $\liminf A_n = \{x \in X |$ *x pertence a* A_n *para todo n a menos de um número finito de n's*$\}$ *e* $\limsup A_n = \{x \in X |$ *x pertence a* A_n *para infinitos n's*$\}$.

2. Dados um espaço mensurável (Y, Σ) e $f : X \to Y$. Prove que $\mathcal{B} := \{f^{-1}(E), E \in \Sigma\}$ é uma σ-álgebra e que f é mensurável relativamente às σ-álgebras $\mathcal{B}$ e Σ.

3. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa integrável com respeito a uma medida finita μ, então para todo $a > 0$:

$$\mu\Big(\{x \in M, f(x) \geq a\}\Big) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu.$$

   Utilizando a desigualdade acima, conclua que se $\int |f| d\mu = 0$, então $f = 0$ em μ-qtp.

4. Mostre que toda σ-álgebra ou é finita ou é não-enumerável.

   Sugestão: Se não for finita, considere infinitos conjuntos $A_1, A_2, \cdots$ *dois-a-dois disjuntos (por que isso é possível?). A partir deles, verifique existem pelo menos* $\#\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *conjuntos na* σ*-álgebra.*

5. Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, g uma função mensurável não-negativa em X e ν definida por

$$\nu(E) = \int_E g(x) d\mu(x).$$

   Prove que ν é uma medida em $\mathcal{B}$. Prove ainda que, para qualquer função mensurável f em X é válido

$$\int f d\nu = \int f g d\mu.$$

   Dica: Primeiro demonstre para funções simples f e use um Teorema de Convergncia.

6. Sejam μ uma medida boreliana finita em $[0,1]$ e $F(t) = \int_0^1 e^{2\pi i t x} d\mu(x)$. Prove que F é de classe C^∞.

7. Considere a função gamma $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^s e^{-x} dx$, $s \geq 0$. Prove que $\Gamma(n) = n!$ para todo inteiro positivo n.

   Sugestão: Considere $\int_0^\infty e^{-tx}dx = t^{-1}$ e derive em t, justificando a derivação dentro do sinal da integral.

8. Calcule os seguintes limites: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x/n)}{(1+(x/n))^n} dx$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$.

9. Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $1 < p < r < \infty$ números reais e f uma função mensurável em X.

   a) Prove que $L^\infty \subset L^r \subset L^p \subset L^1$ e $||f||_1 \leq ||f||_p \leq ||f||_r \leq ||f||_\infty$.

   b) Se $X = [0,1]$ e μ é a medida de Lebesgue, então $||f||_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} ||f||_p$.

10. Existe alguma medida μ boreliana em $\mathbb{R}$ que satisfaça:

    a) $\mu([a,b]) = (b-a)^2$ para todo $a < b$?

    b) $\mu([a,b]) = e^b - e^a$ para todo $a < b$?

11. Dados $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita, $1 \leq p < +\infty$ e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, defina $E_n := \{x \in X | n-1 \leq |f(x)| < n\}$. Mostre que $f \in L^p$ se e somente se

$$\sum_{n=1}^\infty n^p \mu(E_n) < +\infty.$$