Sistemas Dinâmicos Lista 2 (2017.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Dinâmica Unidimensional: Pontos periódicos hiperbólicos, conjugações e Estabilidade Estrutural

1. Considere $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ o deslocamento de k-símbolos. Para cada $p \in \Sigma$, demonstre que o conjunto das pré-imagens $\bigcup_{n\geq 0} \sigma^{-n}(\{p\})$ é denso em Σ. Conclua que o conjunto estável $W^s(p)$ é denso em Σ para todo $p \in \Sigma$.

2. Suponha que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um ponto fixo x_0. Exiba uma conjugação afim entre T e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possui 0 como ponto fixo.

3. Prove que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^3 + \dfrac{x}{2}$ é C^1-estruturalmente estável.

4. Exiba $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com pontos periódicos de todos os períodos exceto 3.

   Sugestão: Considere uma órbita de período 5 *da forma* $T^4(a) < T^2(a) < a < T(a) < T^3(a)$*, tome* T *linear entre os pontos da órbita. Aplique o Teorema de Sharkovskii e verifique que não existe órbita de período* 3.

5. Dados $n \geq 1$ e $\epsilon < \frac{1}{2\pi n}$, considere $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e a dinâmica $T : S^1 \to S^1$ dada por

   $$T(x) = x + \epsilon \sin(2\pi n x).$$

   Verifique que T é um difeomorfismo de Morse-Smale, determinando seus pontos periódicos com seu correspondente tipo de estabilidade (ie, se os pontos periódicos são atratores ou repulsores). Descreva também a dinâmica dos pontos $x \in S^1$.

6. Se $T : S^1 \to S^1$ é um difeomorfismo de classe C^1 possuindo uma quantidade ímpar de pontos periódicos, então algum ponto periódico não é hiperbólico.

7. Dada $T : I \subset \mathbb{R} \to I$ de classe C^1, o *expoente de Lyapunov de* $x_0 \in I$ é definido por

   $$\lambda(x_0) := \limsup_{n\to\to} \frac{1}{n} \log |(T^n)'(x_0)|.$$

   a) Prove que $\lambda(x_0) = \limsup_{n\to\to} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \log |T'(T^j(x_0))|$.

   b) Considere o mapa tenda $T : [0,1] \to [0,1]$ dado por $T(x) = 2x$ se $x \in [0, 1/2]$ e $T(x) = 2 - 2x$ se $x \in [1/2, 1]$. Prove que se $T^j(x_0)$ nunca é igual a $1/2$, então $\lambda(x) = \log 2$. Daí segue que $\lambda(x) = \log 2$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in [0, 1]$.

   c) Dado o mapa $F_4 : [0,1] \to [0,1]$ dado por $F_4(x) = 4x(1-x)$, prove que $\lambda(x) = \log 2$ para Lebesgue-quase todo ponto $x \in [0, 1]$.