CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES

LISTA 2 DE CÁLCULO 3 - TURMA TM 2017.1 (PROF. RICARDO BORTOLOTTI)

Exercício 1. Verdadeiro ou Falso?
(Em cada item, demonstre as afirmações que forem verdadeiras ou dê um contra-exemplo para as afirmações que forem falsas.)

a) Toda sequência limitada é convergente.

b) Toda sequência convergente é limitada.

c) Toda sequência monótona é convergente.

d) Toda sequência convergenteé monótona.

e) Toda sequência limitada é monótona.

f) Toda sequência monótona é limitada.

g) Se $1 \leq a_n \leq 2$ e $\{a_n\}$ é convergente, então $1 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 2$.

h) Se $1 < a_n < 2$ e $\{a_n\}$ é convergente, então $1 < \lim_{n\to\infty} a_n < 2$.

Exercício 2. Demonstre as seguintes afirmações (manejando diretamente a definição de convergência de sequências):

a) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$, então existe n_0 tal que $a_n > 6,5$ para todo $n > n_0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

c) Sejam a_n e b_n duas sequências tais que a_n é limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Exercício 3. Dados $p > 0$, $\sigma > 1$, prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\sigma^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^n}{n!} = 0$$

Obs: Este exercício dá a seguinte ordem para sequências que tendem a infinito: logarítmicas, polinomiais, exponenciais e fatoriais. Cada uma vai pra infinito infinitamente mais rápido que a anterior.

Exercício 4. Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência infinita de números reais para a qual existem constantes $C > 0$ e $\lambda \in (0,1)$ tais que

$$|a_{n+1}| \leq \lambda |a_n| + C.$$

Prove que a_n é limitada e que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ é absolutamente convergente.

Exercício 5. Em cada item, determine se a série é convergente ou divergente, explicitando quais os testes utilizados:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^8}{\sqrt{n+n^{13}}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log\log n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}+n+1}{2^n+n^3+(1+n)^{n^2}+10}$

Exercício 6. Calcule o valor das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$