LISTA 3 - CÁLCULO 3, 2016.1
TURMAS T1 E T6 (PROF RICARDO)

Atualizado em: May 9, 2016.

É útil fazer uma figura para enxergar melhor as curvas, superfícies e sólidos em cada questão.

Quando a questão pedir uma parametrização, dê como resposta a expressão de $\overrightarrow{r}(u,v)$ e também o domínio de $\overrightarrow{r}$.

Caso encontre erros, favor escrever para ricardo@dmat.ufpe.br.

Parametrização de superfícies:

Exercício 1. Dê uma parametrização da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x.

Exercício 2. Parametrize a porção do cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ delimitada pelos planos $z = 2x$ e $z = 4x$.

Exercício 3. Parametrize a porção do plano $2x + 3y + 4z = 5$ delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ $z = 1$.

Exercício 4. Parametrize a porção do elipsóide $x^2 + y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$. Utilizando esta parametrização, encontre um vetor normal a S no ponto $(\frac{\sqrt{5}}{3}, 0, 2)$.

Exercício 5. Parametrize a porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ que não se encontra no interior do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Exercício 6. Determine a equação geral do plano tangente à superfície S determinada pelas equações $x = u^2, y = v^2, z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Exercício 7. Parametrize as superfícies quádricas:

a) Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

b) Hiperbolóide de 1 folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

c) Hiperbolóide de 2 folhas: - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

d) Parabolóide elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

e) Parabolóide hiperbólico: $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

f) Quádricas cilíndricas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $x = 4py^2$

g) Quádrica cônica: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Integrais de superfícies:

Exercício 8. Determine $\iint\limits_S yz\,dS$, onde S é a superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u \cos v$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercício 9. Determine $\iint\limits_S y\,dS$, onde S é a parte do parabolóide $y = x^2 + z^2$ no interior do cilindro $x^2 + z^2 = 4$.

Exercício 10. Determine $\iint\limits_S xy\,dS$, onde S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$.

Exercício 11. Determine $\iint\limits_S xyz dS$, onde S é a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercício 12. Seja S o parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$, com $-2 \leq z \leq 1$. Calcule a massa de S se a densidade em cada ponto for $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.

Exercício 13. Seja S dada por $z = x + 2y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Calcule a massa e o centro de massa de S se a densidade em cada ponto for $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Exercício 14. Seja S dada por $z^2 = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 2$. Calcule a massa e o centro de massa de S se a densidade em cada ponto for $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercício 15. Determine a área da superfície S em cada caso:
a) S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante.
b) S é a parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 3$.
c) S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra entre o plano $y = x$ e o cilindro $y = x^2$, $0 \leq z \leq 1$.
d) S é a superfície parametrizada por $\overrightarrow{r}(u, v) = (u^2, uv, \frac{1}{2}v^2)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$.
e) S é a parte da superfícies esférica $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $0 < a < b$.
f) S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.
g) S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$.
h) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se situa acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
i) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Exercício 16. Sejam S a superfície de revolução obtida girando a curva $\overrightarrow{r}(t) = (t, 0, \frac{1}{t})$, $1 \leq t \leq 2$ em torno do eixo x.
a) Dê uma parametrização de S.
b) Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ através de S da direção da normal exterior a S.

Exercício 17. Sejam $S : x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, orientada pela normal com componente $z \geq 0$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$.

Exercício 18. Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (10, x^2 + y^2, -2xy)$ através da superfície $S : z = 1 - x^2 - y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ na direção da normal orientada para cima.

Exercício 19. Seja $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde S_1 é parametrizado por $\overrightarrow{r}_1(u, v) = (u, v, 0)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, S_2 é parametrizado por $\overrightarrow{r}_1(u, v) = (u, v, 1)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, S_3 é parametrizado por $\overrightarrow{r}_1(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$.
a) Esboce S e a normal $\overrightarrow{n}$ orientada para fora.
b) Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$, sendo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$.

Rotacional e Campos Conservativos:

Exercício 20. Determine se o campo é conservativo e, se for, determine uma função potencial para ele.
a) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ em $\mathbb{R}^3$.
b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xy, x + y, z^3)$ em $\mathbb{R}^3$.
c) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2+z)^3}}(x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.
d) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y + e^z, x + z^2, 2yz + xe^z)$ em $\mathbb{R}^3$.
e) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2xy\cos(x^2) + (\frac{9}{2} - z)e^x, 1 + \operatorname{sen}(x^2), 2 - e^x)$ em $\mathbb{R}^3$.