Medida e Integração   Lista 4 (2018.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Capítulo 10

1. Exercícios 10.C, 10.D, 10.E do Bartle.

2. Exercícios 10.N e 10.O do Bartle.

3. Exercício 10.P do Bartle.

4. Exercício 10.R do Bartle.

5. (Exercício 50, Capítulo 2, Folland) Considerando (X, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e $f : X \to \mathbb{R}$ integrável não-negativa, sejam m a medida de Lebesgue, $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em $[0, +\infty)$ e

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, +\infty), y \leq f(x)\}.$$

Então G_f é $\Sigma \times \mathcal{B}$-mensurável e

$$\mu \times m(G_f) = \int f d\mu.$$

Sugestão: Para mostrar que G_f é mensurável, note que $(x, y) \to f(x) - y$ é a composição dos mapas $(x, y) \to (f(x), y)$ com $(x, y) \to x - y$.

Obs: Esse exercício verifica que "a integral de uma função é a área debaixo do gráfico", pois G_f é o conjunto delimitado pelo eixo x e pelo gráfico de f.

6. (Exercício 12, Capítulo 3, Folland) Para $j = 1, 2$, sejam μ_j, ν_j medidas σ-finitas em (X_j, Σ_j) tais que $\nu_j \ll \mu_j$. Então $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ e

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \times \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

Mudança de variáveis para a integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, Teorema da Diferencição de Lebesgue, funções absolutamente contínuas e de variação limitada.

7. Se f é integrável em $(0, a)$ e $g(x) = \int_x^a t^{-1} f(t) dt$, então g é integrável em $(0, a)$ e

$$\int_0^a g(t) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

8. Dado $s > 0$, integrando $e^{-sxy} \sin x$ com respeito a x e a y, mostre que

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin x dx = \arctan(1/s).$$

9. Se $f \in L^1_{loc}$ e f é contínua em x, então x é um ponto de Lebesgue de f.

10. Se $f \in L^1$, então $|f(x)| \leq Hf(x)$ para todo ponto de Lebesgue x de f.

11. Dada $f \in L^1$, $f \neq 0$, existem $C, R > 0$ tais que

$$Hf(x) \geq C|x|^{-n} \text{ para } |x| > R.$$

Conclua que $m(\{x \in \mathbb{R}^n, Hf(x) > \alpha\}) \geq \frac{C'}{\alpha}$ quando α é pequeno.

Obs: Esse fato implica que a desigualdade de Hardy-Littlewood é essencialmente a melhor que pode se esperar.

12. Se f e Hf estão em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

13. Se F e G são absolutamente contínuas em $[a, b]$, então FG também é. Além disso,

$$\int_a^b FG' + F'G = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

14. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Então existe $M > 0$ tal que $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (isto é, M é uma constante de Lipschitz de F) se, e somente se, F é absolutamente contínua e $|F'| \leq M$ em qtp.

15. Sejam μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}$ e $\phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ de classe C^1, estritamente crescente tal que $\phi(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = +\infty$. Para toda f mensurável não-negativa, vale:

$$\int_\mathbb{R} \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x, f(x) > t\}) \cdot \phi'(t) dt.$$