Elementos de Teoria dos Números (2020.3) - Lista 4

Prof. Ricardo Bortolotti

Capítulo 2 (Congruência)

1. Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio com coeficientes inteiros onde $a_n > 0$ e $n \geq 1$. Mostre que $p(x)$ é composto para infinitos valores inteiros de x.

2. Mostre que para a e b inteiros com $(a, b) = 1$, temos

$$a^{\phi(b)} + b^{\phi(a)} \equiv 1 (modab).$$

Capítulo 4 (Funções Aritméticas)

1. Para quais inteiros m tem-se $\Phi(m)$ ímpar?

2. Para quais inteiros m vale que $\Phi(m)$ divide m?

3. Mostre que existem infinitos inteiros m para os quais $\Phi(m)$ é um quadrado perfeito.

4. Mostre que $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

5. Seja F_n o n-ésimo número de Fibonacci, isto é, $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 3$. Mostre, por indução, que:

   a) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
   b) $F_2 + F_4 + \cdots + F_2 = F_{2n+1} - 1$
   c) $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
   d) $F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1$
   e) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$
   f) Se $m = nq + r$, então $(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$.
   g) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

6. Seja F_n o n-ésimo número de Fibonacci, isto é, $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 3$. Mostre que se $m|n$ então $F_m|F_n$.